哥德巴赫猜想研究

王　元

黑龙江教育出版社

1987年·哈尔滨

责任编辑：孙 怀 川
封面设计：张 秉 钧

哥德巴赫猜想研究

王 元 编

黑 龙 江 教 育 出 版 社 出 版
（哈尔滨市道里森林街42号）
黑龙江新华印刷厂附属厂 印 刷
黑 龙 江 省 新 华 书 店 发 行

开本 787×1092 毫米 1/32·印张 12.5
字数 250,000
1987年11月第1版 1987年11月第1次印刷
印数 1—1,227

统一书号：13357·3 定价：3.50元

序

自从 1920 年以来，哥德巴赫(Goldbach)猜想的研究有了巨大的进展．特别是在 1937 年，依·麦·维诺格拉朵夫(I.M.Vinogradov) 证明了三个素数定理，在 1966 年，陈景润证明了 (1,2)．进而言之，我们必须指出，哥德巴赫猜想的研究给予许多强有力的数论方法的产生与发展以巨大的推动力．这些方法不仅对于数论自身，而且对于数学的许多分支都是很有用的。

三个素数定理与 (1,2) 已经搜集在很多专著之中(见文献(Ⅰ))．一本专著常常包含着最后的结果及尽可能简单的证明，从而使读者易于了解，但却很难包含原始思想发展的诸主要步骤．本选集的目的在于尽可能地搜集哥德巴赫猜想研究中具有原始思想及主要技巧的论文，使读者能了解这一问题的研究的全过程中的各主要阶段，我们期望这将有利于问题的进一步研究。

为了使篇幅不太大，少数文章中的一部分未被搜入，对此编者加了注记以说明，所有英文、法文、德文与俄文的论文均被译成中文。

在出版这本论文集时，不能不使我对哥德巴赫猜想的研究在中国的情况作些回顾．中国最早研究哥德巴赫猜想的人是华罗庚教授．早在 1938 年，他就证明了“几乎所有偶数都是两个素数之和”．

1952 年，中国科学院数学研究所成立了数论研究组，由

华罗庚亲自担任组长，他组织并领导了“哥德巴赫猜想讨论班”。他选择哥德巴赫猜想作为学习与研究对象的指导思想为，考虑到哥德巴赫猜想与解析数论最重要的理论与方法都有密切关系，特别是圆法，三角和估计，密率论，筛法，L-函数理论与素数分布论等；通过讨论班的学习，可以使参加者相当全面地掌握解析数论的诸重要方面，达到既出成果又出人才的良好效果。

哥德巴赫猜想讨论班无疑是非常成功的。参加者曾几次得到关于哥德巴赫猜想的重要结果，受到国内外的注视。可惜这样的讨论班仅进行了五年，即被迫停止了。1958年，在我国数学界中曾掀起批判“理论脱离实际”的运动，哥德巴赫猜想研究被指控为理论脱离实际的典型，数论研究组因此而被解散，人员被拆散了。虽然如此，一些讨论班的参加者，特别是陈景润与潘承洞同志，仍在私下坚持了哥德巴赫猜想的研究工作，甚至在“文化大革命”的浩劫中亦未放弃。他们在这样困难的环境下，取得了出色成就，是十分难得的。

另一方面，国内确有相当多的人在研究哥德巴赫猜想。由于他们的研究不得法，主要是他们的数学基础太差，不了解这个问题研究的历史与成就，他们仅仅从整数的定义出发来研究这个猜想，所以浪费了很多宝贵的光阴，并无收效。

最后，我对于潘承彪教授与其学生和於坤瑞教授给予的多方面帮助，表示衷心的感谢。在准备手稿时，承郭宝文同志的热情帮助，在此致以谢意。

王 元

1986年5月20日

目　录

导　　论

在 1742 年给欧拉（Euler）的一封信中，哥德巴赫建议了关于表整数为素数和的两个猜想，用略为修改过的语言，可以将这两个猜想表述于下：

（A）每一偶数≥6 都是两个奇素数之和。

（B）每一奇数≥9 都可以表为三个奇素数之和。

显然，由（A）可以推出（B）。

在回复哥德巴赫的信中，欧拉表示虽然他不能证明它们，但他深信这些猜想是对的（见狄克逊（Dickson）〔1〕）。

从哥德巴赫写信起到今天，已经积累了不少宝贵的数值资料，指出这两个猜想是对的。例如申懋功（Shen Mok Kong）〔1〕验证过猜想（A）对于不超过 3.3×10^7 的偶数是对的。勒依特，富勒斯，哈蒙特与洛易（Light, Forres, Hammond and Roe）〔1〕进一步算至 10^8。尹定〔1〕更验算至 5×10^8。

在 1900 年巴黎召开的第二届国际数学大会上，希尔伯特（Hilbert）〔1〕在他的著名演说中，为二十世纪的数学家建议了二十三个问题，而猜想（A）就是他的第八问题的一部分。1912 年在剑桥召开的第五届国际数学大会上，兰岛（Landau）〔2〕在他的演说中，将猜想（A）作为素数论中四个未解决的难题之一加以推荐。进而言之，1921 年，哈代（Hardy）〔1,2〕在哥本哈根数学会的演讲中宣称猜想（A）

的困难程度“是可以与数学中任何未解决的问题相比拟的”．因此哥德巴赫猜想不仅是数论，也是整个数学中最著名与困难的问题之一。

自从哥德巴赫写信之日起，直至1920年，并没有方法来处理这个问题．研究工作仅限于用数值计算来验证猜想(A)，或对于猜想(A)作一些进一步的建议（见狄克逊〔1〕，哈代〔1,2〕)

哥德巴赫猜想第一次重大的突破是二十年代获得的，英国数学家哈代与李特伍德（Littlewood）〔2〕用他们的“圆法”在1923年证明了，在广义黎曼（Riemann）猜想正确的前提之下，每个充分大的奇数都是三个奇素数之和及几乎所有偶数都是两个奇素数之和。挪威数学家布朗（Brun）〔2,3〕在1919年用他的“筛法”证明了，每个大偶数都是两个素因子个数均不超过9的整数之和．1930年，苏联数学家史尼尔曼（Schnirelmann）〔1〕，用布朗筛法结合他自己定义的整数密率，证明了堆垒素数论的第一个结果，即任何整数$\geqslant 2$都是不超过C个素数之和，此处及以后，我们用$c, c_1, c_2\cdots\cdots$表示绝对常数，但在不同的地方可以表示不相同的数值．近六十年来，哥德巴赫问题的研究有了重大与深刻的发展，特别是苏联数学家依·麦·维诺格拉朵夫〔3〕用圆法及他自己关于素数变数的指数和估计的天才方法，于1937年无条件地证明了哈代与李特伍德的两个结论，即取消了他们证明中对于广义黎曼猜想的依赖性．布朗方法及他的结果在经历了一系列重大改进后，中国数学家陈景润〔2,3〕于1966年证明了，每个大偶数都是一个素数及一个不超过两个素数之积之和．

我们必须注意，哥德巴赫猜想研究的突破是与十九世纪解析数论的重大成就是明显不可分割的，特别是切比雪夫(Chebychev)，狄里希勒(Dirichlet)，黎曼，阿达玛(Hadamard)，德·拉·瓦·布桑(de la Vallee poussin)与冯.曼哥尔德(von Mangoldt)关于素数分布的理论构成了哥德巴赫猜想当今研究的前提.

现在，我们将哥德巴赫猜想研究的主要构思与进展，概要地叙述于后.

1.圆法

圆法起始于哈代与拉曼努扬(Ramanujan)〔1〕关于整数分析与表整数为平方和的一篇文章，更进一步，从1920年开始，在总标题为"“整数分析”的若干问题"("Some problems of" partitio numerorum"")的一系列论文中，哈代与李特伍德系统地开创并发展了堆垒数论中的一个崭新的分析方法——圆法，其中文章(Ⅲ)与(V)是讨论哥德巴赫猜想问题的.

命

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad s=\sigma+it,\quad \sigma>1.$$

当$\sigma\leqslant1$时，$\zeta(s)$可以由解析开拓来定义. $\zeta(s)$称为黎曼ζ-函数. 黎曼曾猜测$\zeta(s)$在半平面$\sigma>0$上所有的零点$\rho=\beta+i\gamma$都位于直线$\sigma=1/2$上面. 这是一个未解决的问题，我们记之为(RH). 一个较弱的猜想是说，$\sigma>0$上面的每个ρ的实部均$\leqslant\theta$，此处θ满足$\frac{1}{2}\leqslant\theta<1$. 这称为弱黎曼

猜想，记之为（QRH）。更一般些，我们可以研究狄里希勒 L-函数

$$L(s、\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},\quad s=\sigma+it,\ \sigma>1,$$

此处 $\chi(n)$ 为 $\bmod q$ 的一个特征．若 $\chi\neq\chi_0$，则它在 s 平面上正则，此处 χ_0 表示主特征．否则，它仅在 $s=1$ 有一个唯一的极并且 $L(s,\chi_0)=\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{ps}\right)\zeta(s)$ 此处 p 表示素数，类似于（RH）与（QRH），我们可以定义（GRH）与（QGRH），即 $L(s,\chi)$ 在 $\sigma>0$ 上的所有零点都位于 $\sigma=1/2$ 上，及 $L(s,\chi)$ 在 $\sigma>0$ 上的每一零点 ρ 都满足 $\beta\leqslant\theta$，此处 θ 是一个满足上述条件的常数．哈代与李特伍德的两个结果是基于假定（QGRH）之下而得到的，此处 θ 满足 $1/2\leqslant\theta<3/4$．

此后，我们用 p，p^1，p_1，p_2，……表示素数，命 n 为一个整数 >1．命

$$f(x)=\sum_{p>2}(\log p)x^p,\tag{1}$$

此处 $|x|=e^{-1/n}$．则

$$f(x)^3=\sum_{n=1}^{\infty}r_3(n)x^n,$$

此处

$$r_3(n)=\sum_{p_1+p_2+p_3=n}\log p_1\log p_2\log p_3\tag{2}$$

为将 n 表为三个素数之和的表示法的加权和．我们可以类似地定义 $r_2(n)$．所以猜想（A），（B）可以表述为

$$r_2(n)>0(2|n,n>4)\text{与}r_3(n)>0(2\nmid n,n>7).$$

由柯西积分公式得

$$r_3(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(x)^3 x^{-n-1}dx, \qquad (3)$$

此处 Γ 表示以 0 为中心，$e^{-1/n}$ 为半径的圆周. 因 $f(x)$ 可以精密地由 $f(e^{-1/n}e(\frac{h}{q}))$ 来近似逼近，此处 $e(y)=e^{2\pi iy}$ 及 $x(\in\Gamma)$ 为 $e^{-1/n}e(\frac{h}{q})$ 的一个邻近点，所以 Γ 被分割为诸小弧 ξ_{hq} 之和，此处 ξ_{hq} 上的点 x 的幅角位于

$$\left(\frac{h}{q}-\frac{1}{q(q+q')}\right)2\pi \text{ 与 } \left(\frac{h}{q}+\frac{1}{q(q+q'')}\right)2\pi \pmod 1$$

之间，其中 $\frac{h'}{q'}$，$\frac{h}{q}$，$\frac{h''}{q''}$ 为阶为 $N=[\sqrt{n}]$ 的范里(Farey)贯中的三相邻项，因此

$$r_3(n)=\sum_{q=1}^{N}\sum_{h(q)}{}'\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_{hq}} f(x)^3x^{-n-1}dx, \qquad (4)$$

此处 h 过 mod$q$ 的一个缩剩余系，当 $x\in\xi_{hq}$ 时，置

$$x=e\left(\frac{h}{q}\right)e^{-Y},\qquad Y=\eta+i\theta,$$

则在假定（QGRH）之下，其中 $1/2\leqslant\theta\leqslant 3/4$，哈代与李特伍德证明了

$$f(x)=\varphi+\Phi, \qquad (5)$$

此处

$$\varphi=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)Y}\quad 及\quad \Phi=O\left(n^{\theta+\frac{1}{4}}(\log n)^{c}\right).$$

其中 μ（q）与 φ（q）分别表示麦比乌斯（Möbius）与欧拉函数，将(5)代入(4)得

$$r_3(n)\sim\frac{1}{2}\prod_{p\nmid n}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)n^2$$

$$(2\nmid n),\qquad\qquad (6)$$

即当 $2\nmid n$ 及 n 充分大时，命题（B）成立。进而言之，我们容易从(6)推出将奇数 n 表为三个素数之和的表示法 $R_3(n)$ 的渐近公式，即 $R_3(n)$ 渐近地等于 $r_3(n)(\log n)^{-3}$，但用圆法来处理 $r_2(n)$ 却是无效的，即使假定了（GRH）的真实性亦复如此。主要困难不在于主项而在于误差项。因此，若在（5）中将Φ略去，即 4 被用来代替 f，则得

$$r_2(n)\sim 2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid n\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}n^2\quad(2\mid n).$$

$$(7)$$

由(7)可知将偶数 n 表为两个素数之和的表示法数 R_2（n）渐近地等于$r_2(n)(\log n)^{-2}$。这是哈代与李特伍德[2]关于猜想（A）的著名猜想。

在假定（GRH）之下，哈代与李特伍德证明了

$$\sum_{\substack{m=2\\ 2\mid m}}^{n}\left(n_2(m)-2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid m\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}m^2\right)^2$$

$$=O\left(n^{\frac{5}{2}+\varepsilon}\right),\qquad\qquad (8)$$

此后，我们用 ε 表示任意给定的正数，及含于记号 O 中的常

数仅依赖于 ε，命 $E(n)$ 表示不超过 n 的偶数中使猜想 (A) 不成立的偶数个数，则由(8) 立刻推出，

$$E(n)=O(n^{1/2+\varepsilon}), \tag{9}$$

由此推知几乎所有的偶数都是两个素数之和。

以后，依·麦·维诺格拉朵夫对圆法作出了一系列重大的改进，其中之一是用有限和

$$F(\alpha)=\sum_{2<p\leqslant n} e(\alpha p). \tag{10}$$

来代替 $f(x)$，因简单的正交关系

$$\int_0^1 e(\alpha k)d\alpha=\begin{cases}1, & \text{当}\quad k=0,\\ 0, & \text{其他情形}\end{cases} \tag{11}$$

得出

$$R_3(n)=\sum_{p_1+p_2+p_3=n} 1=\int_0^1 F(\alpha)^3 e(-\alpha n)d\alpha. \tag{12}$$

用这个公式来代替(3)。

依·麦·维诺格拉朵夫的改进导源于他在 1928 年关于华林（Waring）问题的一篇文章（见依· 麦· 维诺格拉朵夫〔1〕)。

命 $\tau=n^{-1}(\log n)^{c_1}$ 及 $Q=(\log n)^{c_2}$。当 $q\leqslant Q$ 时，命

$$M_{hq}=\left[\frac{h}{q}-\tau,\frac{h}{q}+\tau\right],\quad (h,q)=1.$$

这称为一段“优弧”·当 n 充分大时，诸优弧是互不相交的。所有 M_{hq} 的和集记之为

$$M=\bigcup_{1\leqslant q\leqslant Q}\ \bigcup_{h(q)}{}' M_{hq},$$

它关于〔0,1〕的余集称之为"劣弧"，记之为 m，所以有

$$R_3(n)=\int_{M}F(\alpha)^3e(-\alpha n)d\alpha+\int_{m}F(\alpha)^3e(-\alpha n)d\alpha$$

$$=I+J\quad（定义）\tag{13}$$

因此对于充分大的 n，(B)的证明归结为往证 I 给出 $R_3(n)$ 的主项而 J 仅给出低阶项。

注记：首先是哈代与李特伍德在他们关于华林问题的工作中提出了优弧与劣弧的划分。

估计 I 的困难是由下面的西革尔（Siegel）—瓦尔菲茨（Walfisz）定理克服的。

命 $q\leqslant Q$ 及 $(h,q)=1$。则

$$\pi(x,q,h)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv h(\bmod q)}}1=\frac{1}{\varphi(q)}\int_2^x\frac{dt}{\log t}+$$

$$O(xe^{-C\sqrt{\log x}}),\tag{14}$$

此处隐含于 O 中的常数依赖于 c_2（见西革尔〔1〕，瓦维菲茨〔1〕）。

由(14)可知

$$F(\alpha)=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{m=2}^{n-1}\frac{e(\beta m)}{\log m}+O(ne^{-c\sqrt{\log n}}),$$

$$\alpha=\frac{h}{q}+\beta\in M.\tag{15}$$

将(15)代入 I 的表达式得

$$I \sim \frac{1}{2} \prod_{p \mid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \nmid n}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)$$

$$\frac{n^2}{(\log n)^3}, \quad 2 \nmid n \tag{16}$$

因此困难集中于 $F(\alpha)$ 的估计，其中 $\alpha \in m$。1937 年，依·麦·维诺格拉朵夫用他自己独创的关于素数变数指数和估计的天才方法给出了 $F(\alpha)$ 一个非寻常的估计，即

$$F(\alpha) \ll n(\log n)^{-c}, \quad \alpha \in m, \tag{17}$$

此处 c 是一个常数 $\geqslant 3$，注意给予 c，我们可以取 c_1，c_2 为依赖于 c 的常数，故由(17) 得

$$J \ll n(\log n)^{-c} \int_0^1 |F(\alpha)|^2 d\alpha \ll n^2(\log n)^{-4} \tag{18}$$

将(16) 与(18) 代入(13) 得

$$R_3(n) \sim \frac{1}{2} \prod_{p \mid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \nmid n}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)$$

$$\frac{n^2}{(\log n)^3}, \quad 2 \nmid n$$

由此得出：存在一个常数 n_0，使每一奇数 $n(>n_0)$ 皆为三个素数之和。这个定理称为"维诺格拉朵夫—哥德巴赫定理"或"三个素数定理"。

我们必须指出，下面两个定理在三个素数定理获得证明之前就已经出现了。

(i) 每一大奇数 n 均可以表示为

$$n = p_1 + p_2 + p_3 p_4 \tag{19}$$

(见依·麦·维诺格拉朵夫〔2〕，艾斯特曼(Estermann)〔2〕)。

(ii) 每一大整数都是两个素数及一个整数的平方之和（见艾斯特曼〔3〕）.

如果在估计 I 时，帕奇（Page）〔1〕定理被用来代替西革尔一瓦尔菲茨定理，则三个素数定理中的 n_0 是可以算出来的。波罗斯特金（Borozdkin）〔1〕给出 $n_0=e^{e^{16.038}}$.

利用维诺格拉朵夫方法，几位数学家独立地指出，几乎所有的偶数都是两个素数之和，进而言之，对于任何常数 c，他们证明了

$$E(n)\ll n(\log n)^{-c}, \tag{20}$$

此处隐含于≪中的常数仅依赖于 c（见冯·德·柯坡尔德(Van der Corput)〔3〕，艾斯特曼〔4〕，海尔布朗（Heilbronn）〔1〕，华罗庚〔1〕，朱达科夫（Tchudakov〔1,2〕）.

在1946年，用哈代与李特伍德原来的将 Γ 分割为 M 与 m 的方法，苏联数学家林尼克(Linnik)〔3,4,5〕给予 $f(x)$ 一个类似于(17)的估计，从而他给了三个素数定理一个新的证明，林尼克关于 $f(x)$ 的估计方法是建立在他关于 L—级数的重要密度定理的基础上面的。这一密度定理被用来代替未被证明的（QGRH），现将密度定理述于下：

命 $\chi(n)$ 为 $\bmod q$ 的原特征，命 $N(\beta,T)$ 表示 $L(s,\chi)$ 在矩形

$$\nu\leqslant\sigma\leqslant 1,\qquad |t|\leqslant T,$$

中的零点个数，此处 $T\geqslant q^{50}$，$\beta\geqslant 1$ 及 $\nu=\beta-\frac{1}{2}$. 则

$$N(\beta,T)\ll q^{2\nu}T^{1-\frac{\nu}{1-\nu}}(\log T)^{10}+q^{30}. \tag{21}$$

（亦见朱达科夫〔3〕）。

以后，于1975年，沃恩(Vaughan)〔2〕给了林尼克关于$f(x)$的估计一个新的证明，进一步的简化证明是潘承彪〔1〕于1977年独立得到的。在他们的证明中，仅用到了L—函数一些简单的性质，关于指数和$F(\alpha)$的估计，沃恩〔5,6〕也给出了一些改进，他的主要思想为运用恒等式

$$-\frac{L'}{L}=-\frac{L'}{L}(1-LG)-L'G=\left(-\frac{L'}{L}-F\right)(1-LG)$$
$$-L'G+F-LFG.$$

这一点潘承洞也曾独立地指出过（见潘承洞、丁夏畦与王元〔1〕）。

应用密度定理的进一步结果，沃恩〔1〕在1972年证明了

$$E(n)\leqslant ne^{-C\sqrt{\log n}}. \tag{22}$$

以后，蒙哥玛丽与沃恩〔1〕于1975年又改进了(22)，他们证明了存在常数δ使

$$E(n)\leqslant n^{1-\delta}. \tag{23}$$

陈景润与潘承洞〔1〕曾指出$\delta>0.01$，而陈景润〔5〕又将这个估计改进为$\delta>0.04$。

此外，林尼克〔6,7,8,9〕首先用圆法证明了下面两个重要定理：

(i) 对于任何整数$g>1$，皆存在$k_0>0$，使当$k>k_0$时，每一大整数$\equiv kg(\bmod 2)$皆可以表示为

$$n=p_1+p_2+q^{x_1}+\cdots+q^{x_k}, \tag{24}$$

此处$x_1,\cdots,x_2$为正整数。

(ii) 在假定（RH）之下，对于任意整数$n>1$，皆存在

p_1, p_2使

$$|n-p_1-p_2| \ll (\log n)^{3+\varepsilon} \tag{25}$$

成立。

关于这两个问题，阿．依．维诺格拉朵〔1〕，加勒革尔(Gallagher)〔4〕，凯蒂(Katai)〔1〕，蒙哥玛丽与沃恩〔1〕，王元〔7〕，帕拉哈(Prachar)〔3〕，潘承洞〔5〕，陆鸣皋〔1〕，及王元与单墫〔1〕均作过有价值的贡献，例如凯蒂证明过，(25)的右端可以换成 $(\log n)^2$。

2.筛法

筛法导源于公元前250年的“埃拉朵斯染尼氏筛法”．埃拉朵斯染尼氏注意到$\sqrt{n}$与n之间的素数可以从序列2,3,……,n，去掉不超过$\sqrt{n}$的任何素数的倍数而得到．命$\pi(x)$ $(=\pi(x,1,1))$表示$\leqslant x$的素数个数及$\Pi=\prod\limits_{p\leqslant\sqrt{n}} p$．
则

$$1+\pi(n)-\pi(\sqrt{n})=\sum_{a\leqslant n}\sum_{d\mid(n,\Pi)}\mu(d)=\sum_{d\mid\Pi}\mu(d)\left[\frac{n}{d}\right]. \tag{26}$$

如果我们用$\frac{n}{d}+\theta(-1<\theta\leqslant 0)$来代替$\left[\frac{n}{d}\right]$，则(26)式中将产生误差项

$$0(2^{\pi(n)}), \tag{27}$$

与n相比，这样大的误差项致使埃拉朵斯染尼氏筛法几乎是无用的．

1919年，布朗〔2,3〕提出了他的新筛法并成功地用于数论中许多困难的与重要的问题．特别是哥德巴赫问题，这是

筛法的一个重大进展。1947 年，赛尔贝格(Selberg)〔2〕给出了另一个筛法，对于每一个可以应用的情况，均可以得到比布朗筛法得到的更为精密的结果。进而言之，赛尔贝格的上界方法是异常简单的，而且具有最后形式的样子。总之，这些方法构成了数论的不可少的工具。

布朗与赛尔贝格方法的精华在于用不等式来代替

$$\Delta(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)=\begin{cases}1, & \text{当 } n=1,\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases} \tag{28}$$

从而使埃拉朵斯染尼氏筛法中的误差项得以减少。布朗定义了两个整数集合 D_1 与 D_2 满足

$$\sum_{\substack{d\mid n\\ d\in D_1}}\mu(d)\leqslant\Delta(n)\leqslant\sum_{\substack{d\mid n\\ d\in D_2}}\mu(d), \tag{29}$$

其中 D_1 与 D_2 的构造颇复杂并具有很大的组合性质。赛尔贝格注意到对于任何满足 $\lambda_1=1$ 的实数集合 λ_d 均有

$$\Delta(n)\leqslant\Big(\sum_{d\mid n}\lambda_d\Big)^2, \tag{30}$$

选择适当的 λ_d，则得赛尔贝格的上界方法。赛尔贝格〔2,3,4〕仅发表了他的上界方法，并指出了它在构造他的下界方法时的作用，但并未发表细节，赛尔贝格的想法由王元〔1,2〕，阿·依·维诺格拉朵夫〔2,3〕，列文(Levin)〔1,2〕及朱尔凯特与黎切尔特(Jurkat and Richert)〔1〕等加以发展与完善。

命 $A=\{a_\nu\}$为一个有限整数集合，命 P 表示一个有限素数集合，进而言之，命 $F(A,P)$ 表示 A 中未被 P 筛去的元素个数，取 $a_\nu=\nu(n'-\nu)\,(1\leqslant\nu\leqslant n)$ 及 P 表示所有$\leqslant n^{\frac{1}{l+1}}$ 的素数，此处 $2\mid n$ 及 l 为一个自然数。记$F(A,P)=F(n,n^{\frac{1}{l+1}})$。

假定当 n 大时，我们可以得到 $F(n,n^{\frac{1}{l+1}})$ 的一个正的下界估计，则可以由此推出每一充分大的偶数 n 都是两个不超过 l 个素数的乘积之和。我们将这一命题记之为 (l,l)。类似地，对于 $l \neq m$，我们可以定义 (l,m)。

布朗首先证明了（9,9），布朗的方法与他的结果被几个数学家加以改进。例如，（7,7）（拉代马海尔(Rademacher〔1〕，1924)，（6,6）（艾斯特曼〔1〕，1932）及(5,7)，(4,9)，(3,15)与(2,366)（黎切(Ricci)〔1,2〕，1937）.

如果将一些组合方法巧妙运用，则布朗与赛尔贝格的方法的威力均将大大加强，组合思想有两大类。一个是运用某些组合恒等式来迭代。这一思想导源于布赫夕塔布（Bchs-aB)〔1〕在 1937 发表的一篇文章。另一想法为孔恩（Kuhm）〔1〕所首创，他在 1941 引进了加权筛法。

命 $F(A,q,q')$ 表示 A 中适合下面条件的元素个数：$a_\nu \equiv 0 \pmod q$ 及 $a_\nu \not\equiv 0 \pmod p$ $(p<q')$。则

$$F(A,p_s)=F(A,p_t)-\sum_{p_t \leq p < p_s} F(A,p,p). \tag{31}$$

这个恒等式被称为布赫夕塔布恒等式。由 $F(A,p_t)$ 的一个下界估计及诸 $F(A,p,p)$ 的上界估计，即可导出 $F(A,p_s)$ 的一个下界估计。类似地，我们可以得到 $F(A,p_s)$ 的一个上界估计。用(31)式来进行逐步迭代，我们可以得到 $F(A,P)$ 的较好的上界与下界估计，运用赛尔贝格方法，朱尔凯特与黎切尔特〔1〕于 1965 年对于某种 $F(A,P)$，得到了他们上

界与下界估计的显式表达式，命 $F(A,b,q,q')$ 表示 A 中适合下面条件的元素个数：$a_\nu \not\equiv 0(\bmod p)(p<q)$ 及 a_ν 至多适合同余式 $a_\nu \equiv 0(\bmod p')(q\leqslant p'<q')$中的 b 个.
则

$$F(A,b,q,q') \geqslant F(A,q) - \frac{1}{b+1} \sum_{q \leqslant p < q'} F(A,p,q). \tag{32}$$

选取适当的 q,q' 与 b，则 $F(A,b,q,q')$的一个正的估计常常引出哥德巴赫问题的较好结果，布赫夕塔布在 1938 年与1940 年分别证明了(5,5)〔2〕，与(4,4)〔3〕，其中塔尔塔科夫斯基(Tartakovskii)〔1,2〕也宣布过(4,4)。孔恩于 1954 年首先证明了$(a,b)(a+b\leqslant 6)$〔3〕.

将布朗、赛尔贝格、布赫夕塔布与孔恩的方法综合使用，王元于 1956 年证明了(3,4)〔1〕,并于 1957 年证明了(3,3)，$(a,b)(a+b=5)$〔3〕与(2,3)〔4,5〕. 阿·依·维诺格拉朵夫在 1956 年也独立地证明过(3,3)〔2,3〕，赛尔贝格〔3〕曾宣布过(2,3)，但未见他发表过证明，其后，列文〔2,3〕与巴尔巴恩(Barban)〔4,5〕于 1963 年给出(2,3)以另证，在他们的证明中，数值计算是简化了，但却需用较深的分析方法.

如果我们取 $A=\{n-p,\ p<n\}$及 P 为$\leqslant n^{\frac{1}{l+1}}$ 的所有素数，则由 $F(A,P)$ 的一个正下界即可推出$(1,l)$，这个集合 A 是艾斯特曼〔1〕在 1932 首先引进的. 他首先在(GRH)之下证明了(1,6)，1956 年，在同样的假定下，王元〔2〕与阿·依·维诺格拉朵夫〔2,3〕将(1,6)改进为，(1,4)，王元〔3,6〕

并于 1957 年给出进一步的改进(1,3)。

为了去掉上述结果中未经证明的猜想，还需新的想法与方法，至今所研究的筛法均为对于每个 $p\in P$，将 A 中属于剩余类 0(mod p)者筛掉.但在某些应用中，对于每个 $p\in P$，需将 A 中属于诸剩余类

$$h_{p,1},\cdots\cdots,h_{p,k(p)}\quad(\bmod\ p)$$

的元素都筛掉，布朗与赛尔贝格方法可以有效地用于这种情况，即就平均而言，$k(p)$相比于 p 是很小的。否则它们是无效的。1941 年，林尼克〔1〕提出了一个天才的方法，即所谓大筛法，可以得到就平均而言，$k(p)$比较大时，A 中不超过 n 而又未被筛去的元素个数的一个上界估计。匈牙利数学家瑞尼(Renyi)〔1,2〕从多方面改进了林尼克的方法并于 1948 年成功地证明了(1,c)，大筛法方面进一步的重要改进是 1965 年由罗斯(Roth)〔1〕与庞比尼(Bombieri)〔1〕得到的，在瑞尼的文章中，他用大筛法证明了一个关于$\pi(x,h,l)$的中值公式，在证明(1,c)时，它可以用来代替(QGRH)，这个公式为

$$\sum_{k\leqslant x^{\delta}}\max_{(h,k)=1}\left|\pi(x,k,h)-\frac{lix}{\varphi(k)}\right|=O\left(\frac{x}{(\log x)^{C_1}}\right).\quad(33)$$

注意在瑞尼的原作中，$\pi(x,h,l)$ 需改成一个加权和。如果(33)对于 $\delta=\frac{1}{2}-\varepsilon$ 成立，则它可以用来代替艾斯特曼、阿·依·维诺格拉朵夫与王元的结果中的(GRH)(见王元〔6〕)。

在 1961 年，巴尔巴恩〔1〕证明了(33)，其中 $\delta=1/6-\varepsilon$,

并得出(1,9)。1962年，潘承洞〔2〕独立地证明了(33)及(1,5)，其中 $\delta=1/3-\varepsilon$。1962年，王元〔6〕指出(1,4)可以从 $\delta=1/3-\varepsilon$ 中推出来。1962年，潘承洞〔3〕与1963年，巴尔巴恩〔3〕独立地证明了(33)对于 $\delta=3/8-\varepsilon$ 成立，从而不需复杂的计算即能导出(1,4)。1965年运用 $\delta=3/8-\varepsilon$ 及复杂的计算，布赫夕塔布〔7,8〕证明了(1,3)。同时，庞比尼〔1〕与阿·依·维诺格拉朵夫〔4〕独立地证明了(33)对于 $\delta=\frac{1}{2}-\varepsilon$ 成立并由此简单地推出(1,3)，公式(33)，其中 $\delta=1/2-\varepsilon$，称为庞比尼—维诺格拉朵夫中值定理。进而言之，庞比尼建立了下述重要公式

$$\sum_{k<x^{1/2}(\log x)^{c_2}}\max_{(h,k)=1}\left|\pi(x,k,h)-\frac{lix}{\varphi(k)}\right|=0\left(\frac{x}{(\log x)^{c_1}}\right). \tag{34}$$

其中 c_1 为任何给定常数，c_2 为依赖于 c_1 的常数，尽管庞比尼公式比具有 $\delta=1/2-\varepsilon$ 的(33)式强了一点，但它在数论中却有很多重要应用，例如(34)可以用来代替霍勒(Hooley)证明的下述重要定理中用到的(GRH)，命 $N(n)$ 表示 $n=p+u^2+v^2$ 的表示个数。则

$$N(n)\sim\frac{\pi n}{\log n}\prod_{p>3}\left(1+\frac{\chi(p)}{p(p-1)}\right)\prod_{\substack{p\equiv1(\bmod 4)\\ p\mid n}}\frac{(p-1)^2}{p^2-p+1}\prod_{\substack{p\equiv3(\bmod 4)\\ p\mid n}}\frac{p^2-1}{p^2-p-1}, \tag{35}$$

此处 $\chi(n)$ 为 mod4 的非主特征。

注记：哈代与李特伍德〔2〕曾用他们的圆法给出了猜想(35)：但即使假定（GRH），他们亦未能证明（35），1957年，霍勒〔1〕首先在(GRH)之下给了(35)一个简洁的证明．然后于1960年，林尼克〔10，11〕用他复杂的离差方法，完全证明了(35)，即不附有任何假定的证明，庞比尼文章的另一优点为他对(34)的证明是富于创造性及简明的，(34)的进一步简化证明则是茹勒革尔〔1，2〕给出来的．

1966年，陈景润〔2，3〕给予加权筛法以重要的改进，从而他证明了(1，2)，这一结果被称为陈氏定理，即每一大偶数都是一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和．命

$$M=N-\Omega+0(n^{9/10}), \qquad (36)$$

此处

$$N=F(n,n^{\frac{1}{10}})-\frac{1}{2}\sum_{n^{\frac{1}{10}}\leqslant p<n^{\frac{1}{3}}}F(n,p,n^{\frac{1}{10}}),$$

$$\Omega=\frac{1}{2}\sum_{\substack{p>n\\(p_{1,2})}}\ \sum_{\substack{n-p=p_1p_2p_3\\p_3\leqslant n/p_1p_2}}.$$

其中 $2|n$，$A=\{n-p,p<n\}$ 及 $(p_{1,2})$ 表示条件 $n^{\frac{1}{10}}\leqslant p_1<n^{1/3}\leqslant p_2\leqslant\left(\frac{n}{p_1}\right)^{1/2}$，则当 n 充分大时，由 M 的正的下界估计即推出(1，2)，事实上，$M>0$ 表示存在一个素数 p 使 $n-p$ 在区间〔$n^{1/10}$，$n^{1/3}$〕中最多只有一个素因子及最多只有一个素因子 $>n^{1/3}$，或 $n-p$ 仅含 $>n^{1/3}$ 的素因子，明所欲证．(36)右端的 N 由孔恩不等式给出，这里需选取适当的参变数（见王元〔6〕），它可以由布朗、赛尔贝格与布赫夕塔布方法结合庞比尼-维诺格拉朵夫公式加以估计，陈景润的天才想法为引进

Ω，并给它一个非寻常的估计。以后，所有关于陈氏定理的简化证明皆在于简化 Ω 的估计，特别是，潘承洞、丁夏畦与王元[1]指出 Ω 的估计可以立刻由下面类似于(34)的中值公式推出：

命 $2\leqslant y\leqslant x$ 及 $\pi(y,a,q,h)=\sum_{\substack{ap\leqslant y\\ ap\equiv h(\bmod aq)}}1$。则

$$\sum_{q\leqslant x^{1/2}/(\log x)^{c_2}}\max_{y\leqslant x}\max_{(h,q)=1}\left|\sum_{c_3<a\leqslant c_4}f(a)\left[\pi(y,a,q,h)-\frac{li\frac{y}{a}}{\varphi(q)}\right]\right|=O\left(\frac{x}{(\log x)^{c_1}}\right)\qquad(37)$$

对于适合 $(\log y)^{2c_2}<c_3\leqslant c_4<y^{1-\varepsilon}$ 的 c_3, c_4 一致成立；此处 $|f(a)|\leqslant 1, c_2=c_1+7$ 及隐含于 O 中的常数依赖于 ε 与 c_1

进而言之，潘承洞与丁夏畦[1,2]建立了一个包有(34)与(37)的中值公式。

3.密率

命 A 表示一个互不相同的非负整数集合，其元素记为 a。命 $A(n)=\sum_{1\leqslant a\leqslant n}1$，进而言之，命 $\alpha=\inf_{n\geqslant 1}\frac{A(n)}{n}$，这称为 A 的史尼尔曼密率。显然有 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，而 $\alpha=1$ 即表示 A 含有所有自然数，类似地，我们可以定义 $B, b, B(n), \beta$ 及 $C, c, C(n), \gamma$。具有形式 $a+b(a\in A, b\in B)$ 的所有互不相同的整数集记之为 $C=A+B$，我们定义 $2A=A+A$ 及 $sA=A+(s-1)A\ (s\geqslant 2)$，史尼尔曼[1,2]证明了两个简单但很重要的定理，即(i)若 $0\in A$ 及 $1\in B$，则 $\gamma\geqslant\alpha+\beta-\alpha\beta$ 及(ii)

若 $0\in A$，$1\in B$，及 $\alpha+\beta\geqslant 1$，则 $\gamma=1$，换言之，集合 C 含有全体自然数．由(i)可知，若 $\alpha>0$，则存在整数 s_0 使 s_0A 的密率 $\geqslant 1/2$，从而由(ii)可知 $2s_0A$ 含有全体自然数，故得(iii)若 $0\in A$ 及 $\alpha>0$，则每一个正整数皆可以表为 $2s_0$ 个 A 的元素之和．命 A^* 表示一个非负整数的集合，其中元素是允许重复的．命 A 表示 A^* 中所有互异元素之集合及 $r(a)$ 表示 a 在 A^* 中重复的次数，则由薛瓦尔茨(Schwarz)不等式得

$$\left(\sum_{1\leqslant a\leqslant n} r(a)\right)^2\leqslant \sum_{1\leqslant a\leqslant n} r(a)^2 \sum_{1\leqslant a\leqslant n} 1 = A(n)\sum_{1\leqslant a\leqslant n} r(a)^2$$

所以

$$\text{(iv)}\quad \alpha\geqslant\left(\sum_{1\leqslant a\leqslant n} r(a)\right)^2 \Big/ n\sum_{1\leqslant a\leqslant n} r(a)^2.$$

史尼尔曼的密率概念确实简单，但却很有用．命 $r(a)$ 表示 $a=p_1+p_2$ 的表示法个数，则由布朗方法可得

$$r(a)\leqslant\frac{ca}{(\log n)^2}\sum_{k\mid a}\frac{\mu(k)^2}{k}.$$

取 A^* 为包有 0,1 及所有形为 $a=p_1+p_2$ 的数的集合，则由(iv) 可知 A 有正密率，因此由(iii)得著名的史尼尔曼一哥德巴赫定理，即存在常数 c，使每个大于 1 的整数都是不超过 c 个素数之和．

命 s 表示最小的整数使每个大整数都是不超过 c 个素数之和，则由史尼尔曼原来的方法可得 $s\leqslant 800{,}000$，由于史尼尔曼密率及布朗方法方面的结果的进一步改进，特别是辛钦

(Khintchine)〔1〕于1932年证明了，若 $A=B$，则$\gamma\geqslant\min(1,2\alpha)$。蒙恩(Mann)〔1〕在1942年证明了著名的 $\alpha+\beta$ 猜想，即 $\gamma\geqslant\min(1,\alpha+\beta)$，及赛尔贝格发表了他的新筛法，所以 s 的估计亦有相应改进。例如，$s\leqslant 2,208$（罗曼诺夫(Romanov)，1935〔1〕)，$s\leqslant 71$（海尔布朗，兰岛与西尔克(Scherk)，1936〔1〕)，$s\leqslant 67$(黎切(Ricci)，1936〔1,2〕)等等，最佳结果 $s\leqslant 6$ 是沃恩〔3〕得到的，无论如何，其精密度仍低于由三个素数定理推出的 $s\leqslant 4$，用史尼尔曼方法还可以估计 S 的上界，此处 S 表示每一个>1的整数皆可以表为不超过 S 个素数之和。

尽管三个素数定理与(1,2)较之(1,1)仅一步之差，似乎用目前方法的改进是不可能证明猜想(A)(或(1,1))，甚至在(GRH)之下或假定(33)对于 $\delta=1-\varepsilon$ 成立，即

$$\sum_{k\leqslant x^{1-\varepsilon}}\max_{(h,k)=1}\left|\pi(x,k,h)-\frac{lix}{\varphi(k)}\right|$$

$$=0\left(\frac{x}{(\log x)^{c}}\right).$$

这一公式通常被称为哈贝斯担(Halberstam)猜想，我们还不能条件地证明(1,1)，因此至今仍有很多人相信哈代演讲中所说的猜想(A)的困难程度“是可以与数学中任何未解决的问题相比拟的”，无论过去或现在都是对的。因此我们深信对于进一进研究猜想(A)，必须有一个全新的思想。

一、表奇数为三个素数之和

1."整数分析"的若干问题：Ⅲ表整数为素数之和

哈代与李特伍德

1.导　论

1.1　哥德巴赫在1742年6月7日给欧拉的一封信中断言，每个偶数2m都是两个奇素数之和，这个命题通常被述为"哥德巴赫的定理"，没有理由怀疑这一定理的正确性，而且当m大时，表示法的数目亦很大，但是所有企图得到一个证明者都没有成功，事实上，还不能证明每个数（或每个大数，即从某一数往后的任意数）是10个素数，或1000000个素数之和，这个问题在最近被认为是"不可克服的科学难关"。1)

---

1) E.Landau: 'Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion,' Proceedings of the fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912, vol.1, pp.93—108 (p.105). This address was reprinted in the Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, vol.21 (1912), pp.208—228.

本文，我们用我们在“堆垒数论 1)”中的新超越方法来处理这个问题，我们未解决它：我们甚至未能证明任何数是

---

1) 我们给出这个方法的各种应用的一个完备文献目录

G.H.HARDY.

1.,Asymptotic formulae in combinatory analysis', Comptes rendus du quatrieme Congres des mathematiciens Scandinaves a Stockholm,1916,pp.45—53.

2.'On the expression of a number as the sum of any number of squares,and in particular of five or seven',Proceedings of the National Academy of Sciences,vol.4(1918),pp.189—193.

3.,Some famous problems of the Theory of Numbers,and in particular Warings Problem, (Oxford, Clarendon Press,1920,pp.1—34).

4.'On the representation of a number as the sum of any number of squares,and in particular of five', Transactions of the American Mathematical Society, vol 21(1920),pp.255—284.

5.,Note on Ramanujan's trigonometrical sum Cq(n)',Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,vol.20(1921),pp.263—271.

G.H.HARDY and J.E.LITTLEWOOD.

1.'A new solution of Waring's Problem', Quarterly Journal of pure and applied mathematics, vol. 48

(1919), pp. 272—293.

2. 'Note on Messrs. Shah and Wilson's paper enttitled: On an empirical formula connected with Goldbach's Theorem', Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 19(1919), pp. 245—254.

3. 'Some problems of 'Partitio numerorum'; I: A new solution of Waring's Problem', Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1920), pp. 33—54.

4. 'Some problems of 'Partitio numerorum'; II: Proof that any large number is the sum of at most 21 biquadrates', Mathematische Zeitschrift, vol. 9(1921), pp. 14—27.

G. H. Hardy and S. Ramanujan.

1. 'Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n', Comptes rendus de l'Academie des Sciences, 2 Jan. 1917.

2. 'Asymptotic formulae in combinatory analysis', Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, vol. 17(1918), pp. 75—115.

3. 'On the coefficients in the expansions of certain modular functions', Proceedings of the Royal Society of London(A), vol. 95(1918), pp. 144—155.

E. Landau.

1000000个素数之和。为了证明一些东西，我们假定了一个未被证明的猜想是真实的，而即使在这个假定之下，我们亦未能证明哥德巴赫的定理，无论如何，我们证明了这个问题

1.'Zur Hardy Littlewood'schen Lösung des Waringschen Problems', Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1921), pp. 88—92.

L. J. MORDELL.

1.'On the representations of numbers as the sum of an odd number of squares', Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. 22 (1919), pp. 361—372.

A. OSTROWSKI.

1.'Bemerkungen zur Hardy-Littlewood'schen Lösung des Waringschen Problems', Mathematische Zeitschrift, vol. 9 (1921), pp. 28—34.

S. RAMANUJAN.

1.'On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers', Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. 22 (1918), pp. 259—276.

N. M. SHAH and B. M. WILSON.

1.'On an empirical formula connected with Goldbach's Theorem', Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 19 (1919), pp. 238—244.

不是“不可克服的”，而将它引入解析数论中可认识的方法的范畴中。

我们的主要结果可以述为：若一个猜想（关于黎曼Zeta函数零点的黎曼猜想的自然推广）成立，则每个大奇数 n 为三个奇素数之和；而且表示法的数目渐近地等于

$$(1.11)\qquad \overline{N}_3(n)\sim C_3\frac{n^2}{(\log n)_3}\prod_p\left(\frac{(p-1)(p-2)}{p^2-3p+3}\right),$$

此处 p 过 n 的所有奇素因子，及

$$(1.12)\qquad C_3=\Pi\left(1+\frac{1}{(\omega-1)_3}\right),$$

其中乘积过所有的奇素数 ω。

猜 想 R

1.2 我们更明确地解释我们猜想的含义，

假定 q 是一个正整数，及

$$h=\varphi(q)$$

表示小于 q 且与 q 互素的整数个数，我们用

$$\chi(n)=\chi_k(n),\qquad (k=1,2,\cdots\cdots,h)$$

表示 h 个模 q 的狄里希勒的“特征”中的一个[1]：χ_1 为

---

1) 有关 L-函数论的记号，我们采用兰岛的书“Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen” vol.1,book 2,pp.391.往后，我们仅用 q 代替他的 k，k 代替 χ，及用 ω 代替 p 来表示素数，关于“范里贯”我们沿用我们文 3 与 4 的记号。

“主”特征。[1]

我们用$\overline{\chi}$表示χ的共轭复数，$\overline{\chi}$为一个特征。

当$\sigma>1$时，由

$$L(s)=L(\sigma+it)=L(s,\chi)=L(s,\chi_k)$$

$$=\sum_{s\ 1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^2}.$$

定义的函数记为$L(s,\chi)$。除作特别声明，模均为q，记

$$\overline{L}(s)=L(s,\overline{\chi}).$$

我们用

$$\rho=\beta+i\gamma$$

表示$L(s)$的一个典型零点，适合$\gamma=0$，$\beta\leqslant 0$的诸零点被排除了。我们称这些零点为非寻常零点，我们记$N(T)$为$L(s)$满足$0\leqslant\gamma\leqslant T$的零点$\rho$的个数。

黎曼猜想的自然推广为

猜想R^*，每个ρ的实部均小于或等于1/2。[2]

我们将不使用这样强的猜想，我们实际上是假定了

1）我们未给L一函数论的有关部分一个完善的综述，但我们给出的兰岛的著作，读者可以从中找到他所需要的全部知识。

2）由于下述原因，猜想必须这样叙述：

a）并未证明过没有$L(s)$在$\frac{1}{2}$与1之间有零点。

b）对应于非原特征的L一函数在直线$\sigma=0$上有零点。

猜想 R。存在一个数$\Theta<3/4$使$L(s)$的每个ρ都满足

$\beta\leqslant\theta$。

这个猜想的假定是我们全部工作的基础；所有本文结果，尽管都是虚幻的，皆依赖于它；[1] 我们将不复述我们定理中的这个条件．

我们假定Θ有它的确下界，若ρ为$L(s)$的一个复零点，则$\bar{\rho}$为$\bar{L}(s)$的一个零点。因此$1-\bar{\rho}$为$L(1-s)$的零点，故由基本方程[2]，它也是$L(s)$的零点．

进一步的记号与术语

1.3 本文将引用下列记号

A表示一个绝对正常数，但在不同的地方不表示同一常数，B为仅依赖于量r的常数．诸O均表示$n\to\infty$的极限过程，与之有关的常数是B型的，而与o有关的量除r之外，对其他量都是均匀的．

ω表示一个素数，p(仅与n相关联时出现) 表示n的奇素因子，一般p表示整数，若$q=1$，则$p=0$；否则

$$0<p<q,\ (p,q)=1.$$

(m,n)表示m与n的最大公因子，m/n表示m可以整除n；否则记为$m\nmid n$．

$\Lambda(n)$，$\mu(n)$具有数论中的习惯含义，当$n=\omega^m$时，$\Lambda(n)=\log\omega$，否则，它等于0，当n为k个不同的素因子

1） 很自然地，许多结果的陈述不依赖于这个猜想．

2） 见兰岛 p. 489，除非特别声明，均指他的 Handbuch．

相乘时，$\mu(n)=(-1)^k$，否则它等于0，我们考虑的基本函数为

(1.31) $$f(x)=\sum_{\overline{\omega}}\log\omega x^{\omega}.$$

为了简化我们的公式，我们记

$$e(x)=e^{2\pi ix}, e_q(x)=e\left(\frac{x}{q}\right).$$

及

(1.32) $$c_q(n)=\sum_p e_q(np).$$

若 χ_k 为原特征，则

(1.33) $$\tau_k=\tau(\chi_k)=\sum_p e_q(p)\chi_k(p)$$

$$=\sum_{m=1}^{q} e_q(m)\chi_k(m).$$ [1]

这个和有绝对值$\sqrt{q}$.[2]

范 里 分 割

1.4 我们用 Γ 表示圆

(1.41) $$|x|=e^{-H}=e^{-\frac{1}{n}}.$$

我们用下面的方法将 Γ 分割为诸弧 $\xi_{p,q}$，它们称为范里

---

1) 若 $(m,q)>1$，则 $\chi_k(m)=0$。

2) 兰岛，p.497.

弧，我们考虑阶为

(1.42)　$1=[\sqrt{n}]$

的范里贯，其首末项分别为$\frac{0}{1}$与$\frac{1}{1}$，假定$\frac{p}{q}$为范里贯中一项，而$\frac{p'}{q'}$与$\frac{p''}{q''}$为它的左右相邻项，定义$j_{p,q}(q>1)$为区间

$$\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q(q+q')},\quad \frac{p}{q}+\frac{1}{q(q+q'')}\right);$$

用$j_{0,1}$与$j_{1,1}$表示区间$\left(0,\frac{1}{N+1}\right)$与$\left(1-\frac{1}{N+1},\ 1\right)$这些区间正好填满了(0,1)，每个$j_{p,q}$被$\frac{p}{q}$分割成两部分，各有长度小于$\frac{1}{qN}$，而不小于$\frac{1}{2qN}$，若将区间$j_{p,q}$看作$\frac{\theta}{2\pi}$的变化区间，此处$\theta=\arg x$，而将两个端点区间合并，则得$\Gamma$分成诸$\xi_{p,q}$的分割[1]。

当我们研究弧$\xi_{p,q}$时，记

(1.43)　$x=e^{\frac{2p\pi i}{q}}X=e_q(p)X=e_q(p)e^{-Y}$,

(1.44)　$Y=\eta+i\theta$.

我们的整个工作转为研究$|x|\to1$，$\eta\to0$时，$f(x)$的性质，

1）分成优弧与劣弧之别，并非开始于此，而始于我们关于华林问题的工作。

我们皆假定 $0<\eta\leqslant 1/2$，在 x 在 $\xi_{p,q}$ 上变化时，X 在一个同余弧 $\zeta_{p,q}$ 上变化，及

$$\theta=-\left(\arg x-\frac{2p\pi}{q}\right)$$

在区间 $-\theta'_{p,q}\leqslant\theta\leqslant\theta_{p,q}$ 上变化（反方向），显然 $\theta_{p,q}$ 与 $\theta'_{p,q}$ 皆小于 $\frac{2\pi}{qN}$ 而不小于 $\frac{\pi}{qN}$，所以

$$\overline{\theta}_{p,q}=\max(\theta_{p,q},\theta'_{p,q})<\frac{A}{qN}.$$

在所有情况下，$Y^{-s}=(\eta+i\theta)^{-s}$ 有其主值

$$\exp(-s\log(\eta+i\theta)).$$

其中（因 η 是正的）

$$-\frac{1}{2}\pi<\mathfrak{I}\log(\eta+i\theta)<\frac{1}{2}\pi.$$

我们用 $N_r(n)$ 表示将 n 表为 r 个素数之和的表示法，注意更序亦算作不同表示法，则得

$$(1.45)\qquad \sum_{n=2}^{\infty}N_r(n)x^n=\left(\sum_{\omega}x^{\omega}\right)^r.$$

我们用 $\nu_r(n)$ 表示和

$$(1.46)\qquad \nu_r(n)=\sum_{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_r=n}\log\omega_1\log\omega_2\cdots\cdots\log\omega_r.$$

故得

$$(1.47)\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\nu_r(n)x^n=(f(x))^r.$$

最后，S_r 表示奇异级数

(1.48)　$S_r=\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n).$

2.预　备　引　理

2.1　引 1　若 $\eta=(Y)>0$，则

(2.11)　$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,

此处

(2.12)　$f_1(x)=\sum_{(q,\ )>1}\Lambda(n)x^n-\sum\log\omega(x^{\omega^2}$

$+x^{\omega^3}+\cdots\cdots)$,

(2.13)　$f_2(x)=\frac{2}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}Y^{-s}\Gamma(s)\,Z(s)ds$,

其中 Y^{-s} 有其主值，

(2.14)　$Z(s)=\sum_{k=1}^{h}C_k\frac{L'_k(s)}{L_k(s)}$,

C_k 仅依赖于 p,q 与 χ_k,

(2.15)　$C_1=-\frac{\mu(q)}{h}$

与

(2.16)　$|C_h|\leqslant\frac{\sqrt{g}}{h}$.

我们得

$f_2(x)=f(x)-f_1(x)=\sum_{(q,\ )=1}\Lambda(n)x^n$

$$= \sum_{1 \le j \le q,\ (q,j)=1} e_q(pj) \sum_{l=0}^{\infty} \Lambda(lq+j) e^{-(lq+j)Y}$$

$$= \sum_{j} e_q(pj) \sum_{l} \Lambda(lq+j) \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} Y^{-s}$$

$$\Gamma(s)(lq+j)^{-s} ds,$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} Y^{-s} \Gamma(s) Z(s) ds,$$

此处

$$Z(s) = \sum_{j} e_q(pj) \sum_{l} \frac{\Lambda(lq+j)}{(lq+j)^s}.$$

因 $(q,j)=1$，我们得[1)]

$$\sum_{l} \frac{\Lambda(lq+j)}{(lq+j)^s} = -\frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h} \chi_k(j) \frac{L'_k(s)}{L_k(s)};$$

因此

$$Z(s) = \sum_{k=1}^{h} C_k \frac{L'_k(s)}{L_k(s)},$$

此处

$$C_k = -\frac{1}{h} \sum_{j=1}^{q} e_q(pj) \overline{\chi}_k(j).$$

因为当 $(q,j)>1$时，$\overline{\chi}_k(j)=0$，所以条件 $(q,j)=1$ 既可略去或加以保留。

因此[2)]

1） 兰岛，p.421。

2） 兰岛，pp.572—573。

$$C_1=-\frac{1}{h}\sum_{1\le j\le q,\ (q,j)=1}e_q(pj)$$

$$=-\frac{1}{h}\sum_{1\le m\le q,\ (q,m)=1}e_q(m)=-\frac{\mu(q)}{h}.$$

又若 $k>1$，我们有[1]

$$C_k=-\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{q}e_q(pj)\overline{\chi_k}(j)=-\frac{\chi_k(p)}{h}$$

$$\sum_{m=1}^{q}e_q(m)\overline{\chi_k}(m).$$

若 $\overline{\overline{\chi_k}}$ 为原特征，则

$$\sum_{m=1}^{q}e_q(m)\overline{\chi_k}(m)=\tau(q,\overline{\overline{\chi_k}}),$$

$$|\tau(\overline{q},\chi_k)|=\sqrt{q},\text{[2]}$$

$$|C_k|=\frac{\sqrt{q}}{h}.$$

若 χ 为非原特征，则它属于模 $Q=q/d$，此处 $d>1$。则 $\overline{\chi_k}(m)$有周期 Q，及

$$\sum_{m=1}^{q}e_q(m)\chi_k(m)=\sum_{n=1}^{Q}e_q(n)\overline{\chi_k}(n)\sum_{l=0}^{d-1}e_q(lQ).$$

1） 兰岛，p.485.这里的结果是仅对原特征来叙述的，其证明当$(p,q)=1$时对于非原特征亦成立。

2） 兰岛，pp.485,489,492.

3） 参见该书页末的附加注记。

内和为零，所以引理证毕[3]。（见上页注3））

2.2　引 2. 我们有

(2.21)　$|f_1(x)|<A(\log(q+1))^A\eta^{-\frac{1}{2}}$.

我们有

$$f_1(x)=\sum_{(q,n)>1}\Lambda(n)x^n-\sum_{\omega}\log\omega(x^{\omega^2}+x^{\omega^3}+\cdots)=f_{1,1}(x)-f_{1,2}(x).$$

但是

$$|f_{1,1}(x)|\le\sum_{\omega|q}\log\omega\sum_{r=1}|x|^{\omega^r}$$

$$<A\log(q+1)\log q\sum_{r=1}|x|^{2^r}<A(\log(q+1))^2$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}e^{-\eta 2^r}<A(\log(q+1))^A\log\frac{1}{\eta}$$

$$<A(\log(q+1))^A\eta^{-\frac{1}{2}},$$

及

$$\sum_{r\ge 2,\ \omega^r\le\xi}\log\omega<A\sqrt{\xi},$$

所以

$$|f_{1,2}(x)|\le\sum_{r\ge 2,\ \omega}\log\omega|x|^{\omega^r}<A(1-|x|)$$

$$\sum_{n}\sqrt{n}\,|x|^n<A(1-|x|)^{-\frac{1}{2}}<A\eta^{-\frac{1}{2}}.$$

由这两个结果即得引理。

2.3 引3. 我们有

$$(2.31)\quad \frac{L'(s)}{L(s)} = -\frac{b}{s-1} + \frac{\delta-b}{s} + b' - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{s+\alpha}{2}\right) + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right),$$

此处

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma'(z)},$$

其中诸 a,δ,S, 与 b' 为依赖于 q 与 χ 的常数,而 a 为 0 或 1.

$$(2.32)\quad b_1 = 1,\ b_k = 0\quad (k>1),$$

及

$$(2.33)\quad 0 \leq \delta < A\log(q+1).$$

除最后一个外[1], 所有结果都是经典的.

δ 的确切定义是复杂的, 在此不引进 δ, 我们仅用到 δ 不超过 q[2] 的相异素因子个数, 所以适合(2.33).

2.41 引4. 若 $0<\eta\leqslant 1/2$, 则

$$(2.411)\quad f(x) = \frac{\mu(q)}{hY} + \sum_{k=1}^{h} C_k G_k + P,$$

此处

$$(2.412)\quad C_k = \sum_{\rho_k} \Gamma(\rho) Y^{-\rho},$$

---

1) 兰岛, pp.509,510,519.

2) 兰岛, p.511 (注记).

(2.413) $$|P|<A\sqrt{q}(\log(q+1))^{A}\left(\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h}|b_k|+\eta^{-\frac{1}{2}}+|Y|^{\frac{1}{4}}\delta^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\delta=\arctan\frac{\eta}{|\theta|}.$$

由(2.13)与(2.14)，我们有

(2.415) $$f_2(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}Y^{-s}\Gamma(s)Z(s)ds$$

$$=\sum_{k=1}^{h}\frac{C_k}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}Y^{-s}\Gamma(s)\frac{L'_k(s)}{L_k(s)}ds$$

$$=\sum_{k=1}^{h}C_k f_{2,k}(x),$$

(定义)，但是[1)]

(2.416) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}Y^{-s}\Gamma(s)\frac{L'(s)}{L(s)}ds$$

$$=-\frac{b}{Y}+R+\sum_{\rho}\Gamma(\rho)Y^{-\rho}$$

---

1) 柯西定理的应用可以用 $\psi(x)$ 与 $\pi(x)$ 的“显公式”的经典证明方法来论证，见兰岛，pp.333—368. 因当 $|t|\to\infty$ 时，恰如 $e^{-a|t|}Y^{-s}\Gamma(s)\to 0$，故证明更容易，请比较我们的文章《Contributions tn the theory of the Riemenn Zeta-funcfion and the theory of the distribution of primes》，Acta Math; vol.41(1917),pp.117—196.

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{4}-i\infty}^{-\frac{1}{4}+i\infty} Y^{-s}\Gamma(s)\frac{L'(s)}{L(s)}ds,$$

此处

$$R-\left\{Y^{-s}\Gamma(s)\frac{L'(s)}{L(s)}\right\}_0,$$

其中 $\{f(s)\}_0$ 通常表示 $f(s)$ 在 $s=0$ 处的残数。

现在[1]

$$\frac{L'(s)}{L(s)}=\log\frac{\pi}{Q}+\sum_{\nu=1}^{c}\frac{\varepsilon_\nu\log\omega_\nu}{\omega_\nu^s-\varepsilon_\nu}+\sum_{\nu=1}^{c}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu\log\omega_\nu}{\omega_\nu^{1-s}-\bar{\varepsilon}_\nu}$$

$$-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{s+a}{2}\right)-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1-s+a}{2}\right)-\frac{\bar{L}'(1-s)}{\bar{L}(1-s)},$$

此处 Q 为 q 的因子而是 χ 的模，c 为整除 q 而不能整除 Q 的素数个数，$\omega_1,\omega_2,\cdots$ 为这些素数，及 ε_ν 为一个单位根，因此若 $\sigma=-1/4$，则

$$(2.417)\quad \left|\frac{L'(s)}{L(s)}\right|<A\log q+Ac\log q+A\log(|t|+2)$$

$$+A<A(\log(q+1))^4\log(|t|+2).$$

又若 $s=-\frac{1}{4}+it$，$Y=\eta+i\theta$，则

$$|Y^{-s}|=|Y|^{\frac{1}{4}}\exp\left(t\arctan\frac{\theta}{\eta}\right),$$

$$|Y^{-s}\Gamma(s)|<A|Y|^{\frac{1}{4}}(|t|+2)^{-\frac{3}{4}}$$

---

1) 兰岛，p.517.

$$\exp\left(-\left(\frac{1}{2}\pi-\arc\tan\frac{|\theta|}{\eta}\right)|t|\right),$$

$$<A|Y|^{\frac{1}{4}}\frac{|t|^{-\frac{1}{2}}}{\log(|e|+2)}e^{-\delta|t|},$$

所以

$$(2.418)\quad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{4}-i\infty}^{-\frac{1}{4}+i\infty}Y^{-s}\Gamma(s)\frac{L'(s)}{L(s)}ds\right|$$

$$<A(\log(q+1))^{A}|Y|^{\frac{1}{4}}\int_{0}^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-\delta t}dt$$

$$<A(\log(q+1))^{A}|Y|^{\frac{1}{4}}\delta^{-\frac{1}{2}}.$$

2.42　现在考虑 R。因

$$\sum\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)=0\quad(s=0),$$

所以

$$R=((b+b')\Gamma(s))_0+\left\{\frac{\delta-b}{s}Y^{-s}\Gamma(s)\right\}_0$$

$$-\frac{1}{2}\left\{Y^{-s}\Gamma(s)\psi\left(\frac{s+a}{2}\right)\right\}_0$$

$$=A_1(b+b')-(\delta-b)(A_2+A_3\log Y)$$
$$+C_1(a)+C_2(a)\log Y.$$

此处每个 C 为两个绝对常数值中的一个（按照 a 的值）因

$$0\leq b\leq 1,0\leq\delta<A\log(q+1),|\log Y|<A\log\frac{1}{\eta}$$

$$<A\eta^{-\frac{1}{2}},$$

所以

$$(2.421)\quad |R|<A|b'|+A\log(q+1)\eta^{-\frac{1}{2}}.$$

由(2.415)，(2.416)，(2.418)，(2.421) 与 (2.5) 可知

$$f_{2,k}(x)=-\frac{b}{Y}+G_k+P_k,$$

$$|P_k|<A(\log(q+1))^A(|b|+\eta^{-\frac{1}{2}}+|Y|^{\frac{1}{4}}\delta|^{-\frac{1}{2}}).$$

$$(2.422)\quad f_2(x)=-\frac{\mu(q)}{hY}+\sum_k C_kG_k+P,$$

$$(2.423)\quad |P|<A\sqrt{q}(\log(q+1))^A\Big(\frac{1}{h}\sum_k|b_k|$$

$$+\eta^{-\frac{1}{2}}+|Y|^{\frac{1}{4}}\delta^{-\frac{1}{2}}\Big).$$

由(2.422)，(2.423)，(2.11)与(2.21) 即得引 4.

2.5. 引 5　若 $q>1$ 及 χ_k 为原特征（从而为非主特征[1]），则

$$(2.51)\quad L(s)=\frac{ae^{bs}}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}\prod_{\varrho}\left(\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\right),$$

此处

$$a=a(q,\chi)=a_k.$$

$$(2.521)\quad |L(1)|=\pi q^{-\frac{1}{2}}|L(0)|\quad (a=1),$$

$$(2.522)\quad |L(1)|=2q^{-\frac{1}{2}}|L'(0)|\quad (a=0).$$

1）兰岛，p.480.

进而言之

(2.53) $1-\Theta \leq R(\rho) \leq \Theta$,

与

(2.54) $\left|\frac{L'(1)}{L(1)}\right| < A(\log(q+1))^4$.

这一引理仅为引6与引7证明中所需结果的综合，它们有很不相同的深度。(2.51)是经典的[1]。其余两个可以从$L(s)$的函数方程立刻推出[2]。

不等式(2.53)立刻由$L(s)$的函数方程及它没有因子$1-\varepsilon_\nu \omega_\nu^{-s}$（对于原特征$\chi$）而推出。最后，(2.54)是革隆瓦尔（Gronwall）[3]证明的。

---

1) 兰岛，p.507.

2) 兰岛，pp.496,497.

3) 见T.H.Gronwall, 'Sur les séries de Dirichlet correspondant a des caracteres complexes', *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 35(1913), pp.145—159. 革隆瓦尔证明了对于每个复特征，当猜想R（或较弱的猜想）成立下，对于实特征有

$$\frac{1}{|L(1)|} < A \log q(\log\log q)^{3/8}.$$

兰岛（'Über die Klassenzahl imaginar quadratischer Zahlkörper', Göttinger Nachrichten, 1918, pp. 285—295 (p.286, f.n.2)) 指出，当χ为实特征，革隆瓦尔的方法只能得到较弱的不等式。

$$|L(1)|<A\log q\sqrt{\log\log q}.$$

兰岛还证明（属于海克（Hecke）的）了与基本判别式 $-q$ 有关的实特征 $\left(\frac{-q}{n}\right)$ 有

$$\frac{1}{|L(1)|}<A\log q.$$

这方面的第一个结果是属于兰岛自己的（见'Über das Nichtverschwinden der Dirichletschen Reihen, welche Komplexen Charackeren entsprechen', Mach, Annalen vol.70(1911), pp.69—78）兰岛在那里证明了，对于复特征 χ 有

$$\frac{1}{|L(1)|}<A(\log q)^5,$$

容易证明（见最后征引的兰岛的文章 p.75）

$$|L'(1)|<A(\log q)^7,$$

所以所有这些结果均比我们需要者更多。

2.61 引 6. 若 $M(T)$ 表示 $L(s)$ 在

$$0\leqslant T\leqslant|\gamma|\leqslant T+1$$

中的零点个数，则

$$M(T)<A(\log(q+1))^4\log(T+2). \tag{2.611}$$

非原特征对应的 $L(s)$ 的 ρ 为对应的模 Q 的原特征的 $L(s)$ 的零点，此处 $Q|q$，加上（$s=0$ 除外）某函数

$$E_\nu=1-\varepsilon_\nu\,\omega_\nu^{-s}$$

的诸零点，此处

$$|\varepsilon_\nu|=1,\quad \omega_\nu|q.$$

ω_ν的个数不超过$A\ \log(q+1)$，每个E_ν在$\sigma=0$上有一个零点集，并有等距

$$\frac{2\pi}{\log\omega_\nu}>\frac{2\pi}{\log(q+1)}.$$

这些零点加于$M(T)$的量小于$A(\log(q+1))^2$；从而我们仅需考虑一个原特征(因此，当$q>1$时，非主特征)的$L(s)$.

我们注意到：

(a) 对于$L(s)$与$\bar{L}(s)$，a是一样的；

(b) 对于实数s，$L(s)$与$\bar{L}(s)$互为共轭，所以对应于$L(s)$的b'为对应于$L(s)$的b'的共轭$\overline{b'}$；

(c) $L(s)$的典型零点ρ或为$\bar{\rho}$，或(由函数方程)为$1-\rho$，所以

$$S=\sum\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{1-\rho}\right)=\sum\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\bar{\rho}}\right)$$

为实的.

记住这些注记，首先假定$a=1$，则由(2.51)与(2.521)可知

$$\frac{\pi^2}{q}=\left|\frac{L(1)\bar{L}(1)}{L(0)\bar{L}(0)}\right|=Ae^{b'}\prod\left(\left(1-\frac{1}{\rho}\right)e^{\frac{1}{\rho}}\right)e^{\overline{b'}}$$

$$\prod\left(\left(1-\frac{1}{1-\rho}\right)e^{\frac{1}{1-\rho}}\right)\Bigg|$$

$$=Ae^{2\ (\ \ +},$$

这儿用到

$$\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\left(1-\frac{1}{1-\rho}\right)=1.$$

因此

(2.612) $|2R(b')+S|<A\log(q+1)$。

另一方面，若 $a=0$，由(2.51)与(2.522)得

$$\frac{4}{q}=\left|\frac{L(1)\bar{L}(1)}{L'(0)\bar{L}'(0)}\right|=A\left|e^{b'}\prod\left(\left(1-\frac{1}{\rho}\right)e^{\frac{1}{\rho}}\right)e^{b}\prod\left(\left(1-\frac{1}{1-\rho}\right)e^{\frac{1}{1-\rho}}\right)\right|.$$

如前仍可得(2.612)。

2.62 对于每一非主特征（原特征或非原特征），由(2.31)可知

(2.621) $$\frac{L'(1)}{L(1)}=\delta+b'-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1+a}{2}\right)+\Sigma\left(\frac{1}{1-\rho}+\frac{1}{\rho}\right).$$

特别地，当 χ 为原特征，由(2.621)，(2.54)与(2.33)得

(2.622) $$|R(b)+S|=\left|R\frac{L'(1)}{L(1)}-\delta+\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1+a}{2}\right)\right|<A(\log(q+1))^{A}.$$

由(2.612)与(2.622)得

(2.623) $S<A(\log(q+1))^{A}$

与

(2.624) $|R(b)|<A(\log(q+1))^{A}$.

2.63 若 $q>1$，χ 为原特征（所以 $b=0$），及 $s=2+iT$，则由(2.31)，(2.33)与(2.624)得

$$0<\sum\left(\frac{2-\beta}{(2-\beta)^{2}+(T-\gamma)^{2}}+\frac{\beta}{\beta^{2}+\gamma^{2}}\right)$$

$$= R\sum\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) = R\frac{L'(s)}{L(s)} - R\left(\frac{\delta}{s}\right)$$

$$- R(b') + \frac{1}{2}R\left(\psi\left(\frac{s+a}{2}\right)\right)$$

$$\leqq \left|\frac{L'(s)}{L(s)}\right| + \left|\frac{b'}{s}\right| + |R(b)| + \left|\psi\left(\frac{s+a}{2}\right)\right|$$

$$< A + A\log(q+1) + A(\log(q+1))^A$$

$$+ A\log(|T|+2) < A(\log(q+1))^A \log(|T|+2),$$

$$\sum_{|T-\gamma|\leq 1}\frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} < A(\log(q+1))^A$$

$$\log(|T|+2).$$

左端的每一项皆大于 A，而项数不少于 $M(T)$，故得引理的结果，我们除去 $q=1$ 的情况，这时的结果是熟知的[1]。

2.71 引 7. 我们有

(2.711) $|b'| < Aq(\log(q+1))^A$.

首先假定 χ 为非主特征，则由(2.621)与(2.54)得

(2.712) $$|b'| < A(\log(q+1)))^A + \left|\sum\left(\frac{1}{1-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right|.$$

我们记

(2.713) $$\sum = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

此处 Σ_1 的求和范围为 $1-\Theta \leqslant R(\rho) \leqslant \Theta$，而 Σ_2 过 $R(\rho)=0$

1) 兰岛，p.337.

的 ρ 求和，易知 $\Sigma_1=S'$，此处 S' 为对应于模 Q 的原特征的 $L(s)$ 所对应的 S，此处 $Q|q$，因此由(2.623)得

(2.714) $$\sum_1 < A(\log(Q+1))^A < A(\log(q+1))^A.$$

由于 Σ_2 中的零点 ρ 为

$$\prod_\nu\left(1-\frac{\varepsilon_\nu}{\omega_\nu^s}\right),$$

的零点（$s=0$ 除外），其中 ω_ν 为 q 的因子而 ε_ν 为 m 次单位根，此处 $m=\varphi(Q)<q$[1]；因此 ω_ν 的个数小于 $A\ \log q$ 及

$$\varepsilon_\nu=e^{2\pi i\omega'_\nu},$$

其中 $\omega_\nu=0$ 或

$$\frac{1}{q}\leqslant|\omega'_\nu|\leqslant\frac{1}{2}.$$

我们用 ρ_ν 表示 $1-\varepsilon_\nu\omega_\nu^{-s}$ 的一个零点，用 ρ'_ν 表示满足 $|\rho_\nu|\leqslant1$ 的零点，用 ρ''_ν 表示满足 $|\rho_\nu|>1$ 的一个零点，则

(2.715) $$\left|\sum_2\left(\frac{1}{1-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right|\leq\sum_\nu\left(\sum_{\rho\nu'}\sum_{\rho\nu''}\right)\left|\frac{1}{1-\rho}+\frac{1}{\rho}\right|.$$

任何 ρ_ν 皆有形式

$$\rho_\nu=\frac{2\pi i(m+\omega'_\nu)}{\log\omega_\nu},$$

此处 m 为一个整数，因此 ρ'_ν 的个数不超过 $A\ \log\omega_\nu$ 或

---

1) 由于(兰岛，p.482) $\varepsilon_\nu=X(\omega_\nu)$，其中 X 为模 Q 的一个特征。

$A\ \log(q+1)$；在我们的和中的对应项的绝对值不超过

$$(2.716)\qquad \frac{A}{|\rho|}<\frac{A\log\omega_\nu}{|\omega'_\nu|}<Aq\log(q+1),$$

因此

$$(2.717)\qquad \left|\sum_{\rho\nu'}\right|<Aq(\log(q+1))^2.$$

还有

$$(2.718)\qquad \left|\sum_{\rho\nu''}\right|\leq\sum_{\rho\nu''}\frac{1}{\rho(1-\rho)}<\sum_{\rho\nu''}\frac{1}{|\rho|^2}$$

$$<A(\log\ \omega_\nu)^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}<A(\log(q+1))^2.$$

由（2.715)，(2.717）与(2.718)可知

$$(2.719)\qquad \left|\sum{}_2\right|<Aq(\log(q+1))^4;$$

而由(2.713)，(2.714）与（2.719）即得引理.

2.72　我们已经假定 χ 不是主特征：对于主特征（mod q)，我们有[1]

$$L_1(s)=\prod_{\omega|q}\left(1-\frac{1}{\omega^s}\right)\zeta(s).$$

因 $a=0$，$b=1$，我们得

$$\sum_{\omega|q}\frac{\log\omega}{\omega^s-1}+\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{L'_1(s)}{L_1(s)}$$

1）兰岛，p423.

2）Σ 关于 $L_1(s)$ 的复零点求和，而不仅仅关于 $\zeta(s)$ 的零点求和.

$$= \frac{\delta-1}{s} - \frac{1}{s-1} + b' - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}s\right)$$

$$\sum\left(+\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right),^{2)} \qquad \text{(见上页)}$$

$$\sum_{\omega \mid q}\frac{\log\omega}{\omega-1} + \lim_{s \to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{s-1}\right)$$

$$= \delta - 1 + b' - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}\right) + \sum\left(\frac{1}{1-\rho}+\frac{1}{\rho}\right),$$

$$|b'| < A\log(q+1) + \left|\sum\left(\frac{1}{1-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right|.$$

这对应于（2.712），由此可如前加以证明.

2.81　引 8. 若 $0<\eta\leqslant 1/2$，则

(2.811)　$f(x) = \frac{\mu(q)}{hY} + \sum_{k=1}^{k} C_k G_k + P,$

此处

(2.812)　$G_k = \sum_{\rho_k}\Gamma(\rho)Y^{-\rho},$

(2.813)　$|P| < A\sqrt{q}(\log(q+1))^4(q+\eta^{-\frac{1}{2}} + |Y|^{\frac{1}{4}}\delta^{-\frac{1}{2}}),$

(2.814)　$\delta = \arctan\frac{\eta}{|\theta|}.$

这是引 4 与 7 的直接推论

2.82　引 9. 若 $0<\eta\leqslant 1/2$，则

(2.821)　$f(x) = \varphi + \Phi,$

此处

$$(2.822)\quad \varphi=\frac{\mu(q)}{hY},$$

$$(2.823)\quad |\Phi|<A\sqrt{q}\,(\log(q+1))^{4}(q+\eta^{-\frac{1}{2}}$$

$$+|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right),$$

$$(2.824)\quad \delta=\arctan\frac{\eta}{|\theta|}.$$

我们有

$$(2.825)\quad |G_k|\leq\sum{}_1|\Gamma(\rho)Y^{-\rho}|+\sum{}_2|\Gamma(\rho)Y^{-\rho}|,$$

$$|Y^{-\rho}=|Y|^{-\beta}\exp\left(\gamma\operatorname{arc}\ \tan\frac{\theta}{\eta}\right)$$

$$<A|Y|^{-\beta};$$

而在 $\Sigma_{2,1}$ 中有 $|\Gamma(\rho)|<A$. 所以

$$(2.832)\quad \left|\sum{}_{2,1}\right|<A|Y|^{-\beta}\sum{}_{2,1}|\Gamma(\rho)|$$

$$<A|Y|^{-\theta}\sum{}_{2,1}1<A(\log(q+1))^{4}$$

$$|r|^{-\theta}.$$

在 $\Sigma_{2,2}$ 中, $|Y|<A$, 及由 (2.716) 有

$$\frac{1}{|\rho|}<Aq\log(q+1),$$

所以

$$(2.833)\quad \left|\sum{}_{2,2}\right|<A\sum{}_{2,2}|\Gamma(\rho)|$$

$$=A\sum{}_{2,2}\frac{|I(1+\rho)|}{|\rho|}<A\sum{}_{2,2}\frac{1}{|\rho|}$$

$$<Aq(\log(q+1))^{4}.$$

由（2.825），（2.826），（2.831），（2.832）与（2.833）得

$$(2.834)\quad |G_k|<A(\log(q+1))^A(q+|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right)=H_k,$$

及由（2.811），（2.812），（2.813），（2.821），（2.822）与（2.834）得

$$|\Phi|=\left|\sum_{k=1}^{h}C_kG_k+P\right|$$

$$<\sum_{k=1}^{h}|C_kG_k|+A\sqrt{q}\,(\log(q+1))^A$$

$$(q+\eta^{-\frac{1}{2}}+|Y|^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}})$$

此处 Σ_1 过适合 $|\gamma|\geqslant 1$ 的诸 ρ_k 求和，Σ_2 则过 $|\gamma|<1$ 的 ρ_k 求和，在 Σ_1 中，我们有

$$|\Gamma(\rho)Y^{-\rho}|=\Gamma(\beta+i\gamma)||Y|^{-\beta}\exp\left(\gamma\arctan\frac{\theta}{\eta}\right)$$

$$\leqq A|\gamma|^{\beta-\frac{1}{2}}|Y|^{-\beta}$$

$$\exp\left(-\left(\frac{1}{2}\pi-\arctan\frac{|\theta|}{\eta}\right)|\gamma|\right)$$

$$\leqq A|\gamma|^{\theta-\frac{1}{2}}|Y|^{\theta}e^{-\delta|\gamma|},$$

（因 $|Y|<A$，及由猜想 R，$\beta\leqslant\theta$）由（2.611）可知 $|\gamma|$ 介于 T 与 $T+1$（$T\geqslant 0$）中的 ρ 的个数 M（T）不超过 $A(\log(q+1)^A\log(T+2)$．因此

$$\sum{}_1|\gamma|^{\theta-\frac{1}{2}}e^{-\delta|\gamma|}\leqq A(\log(q+1))^A\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{\theta-\frac{1}{2}}$$

$$\log(n+2)e^{-\delta n}<A(\log(q+1))^A\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right).$$

(2.826) $$\sum|{}^-\Gamma(\rho)Y^{-\rho}|<A(\log(q+1))^A|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right),$$

2.83 再由(2.611)，Σ_2 最多含有 $A(\log(q+1))^A$项。记

(2.831) $$\sum_2=\sum_{2,1}+\sum_{2,2},$$

$\Sigma_{2,1}$ 过适合 $1-\theta\leqslant\beta\leqslant\theta$ 的零点，而 $\Sigma_{2,2}$ 则过 $\beta=0$ 的零点，在 Σ_2 中有

$$<\frac{\sqrt{q}}{h}\sum_{k=1}^{h}H_k+A\sqrt{q}(\log(q+1))^A\left(q+\eta^{-\frac{1}{2}}+|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right)\right)$$

$$<A\sqrt{q}(\log(q+1))^A(q+\eta^{-\frac{1}{2}}+|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right).$$

(2.823)证完。

2.9. 引 10. 我们有

(2.91) $h=\varphi(q)>Aq(\log q)^{-A}$.

事实上[1]，我们有

---

1) 兰岛，p.217.

$$\varphi(q) > (1-\delta)e^{-C}\frac{q}{\log\log q},\quad (q > q_0(\delta)),$$

此处 δ 为任意正数，C 为欧拉常数。

3. 主要定理的证明

3.11　定理 A。若 r 为一个整数 $\geqslant 3$，及

(3.111)　$(f(x))^r = \sum \nu_r(n) x^n$，

于是

(3.112)　$\nu_r(n) \sum_{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_r=n} \log\omega_1 \log\omega_2 \cdots \log\omega_r$，

则

(3.113)　$\nu_r(n) = \frac{n^{r-1}}{(r-1)!} S_r + O(n^{r-1+(\theta-\frac{3}{4})}$

$$(\log n)^B) \sim \frac{n^{r-1}}{(r-1)!} S_r,$$

此处

(3.114)　$S_r = \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n)$。

有这样的了解，今后与 O 有关的常数仅依赖于 r，而它表示 $n\to\infty$ 的极限过程。

若 $n \geqslant 2$，则得

(3.115)　$\nu_r(n) = \frac{1}{2\pi i}\int (f(x))^r \frac{dx}{x^{n+1}}$，

积分路径为圆 $|x| = e^{-H}$，此处 $H = \frac{1}{n}$，所以

$$1-|x|=\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\infty\frac{1}{n},$$

用阶为 $N=[\sqrt{n}]$的范里分割，得

$$(3.116)\quad \nu_r(n)=\sum_{q=1}^{N}\sum_{p<p,\ (p,q)=1}\frac{1}{2\pi i}$$

$$\int_{\xi_{p,q}}(f(x))^r\frac{dx}{x^n+1}$$

$$=\sum e_q(-np)\frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta_{p,q}}(f(x))^r\frac{dX}{X^n+1}$$

$$\sum e_q(-np)j_{p,q},$$

由于

$$|f^r-\varphi^r|\leq|\Phi(|f^{r-1}|+|f^{r-2}\rho|+\cdots+|\varphi^{r-1}|)$$
$$<B(|\Phi f^{r-1}|+|\Phi\varphi^{r-1}|),$$

及$|X^{-n}|=e^{n+1}<A$，所以

$$(3.117)\quad j_{p,q}=l_{p,q}+m_{p,q},$$

此处

$$(3.118)\quad l_{p,q}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta_{p,q}}\varphi^r\frac{dX}{X^n+1},$$

$$(3.119)\quad |m_{p,q}|=0\left(\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}}(|\Phi f^{r-1}|\right.$$
$$\left.+|\Phi\varphi^{t-1}|)d\theta\right).$$

3.12　我们有$\eta=H=\frac{1}{n}$及$q\leqslant\sqrt{n}$，故由(2.823)有

$$(3.121)\quad |\Phi|<An^{\frac{3}{4}}(\log n)^A+A(\log n)^A\sqrt{q}$$
$$|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right),$$

此外$\delta=\arctan\eta/|\theta'|$。我们分两种情况来讨论。若$|\theta'|\leqslant\eta$，则

$$|Y|>A\eta,\ \delta>A,$$

及

$$(3.122)\quad \sqrt{q}\,|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right)<An^{\frac{1}{4}}\eta^{-\theta}$$

$$=An^{\theta+\frac{1}{4}}.$$

若$\eta<|\theta'|\leqslant\overline{\theta'}_{p,q}$，则由于$q|\theta'|\leqslant q\overline{\theta'}_{p,q}<An^{-1}/^2$，所以

$$\delta>A\frac{\eta}{|\theta'|}>\frac{A}{n},\ |Y|>A|\theta'|,$$

$$(3.123)\quad \sqrt{q}\,|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right)<A\sqrt{q}\,.$$

$$|\theta'|^{-\theta}.\eta^{-\theta-\frac{1}{2}}|\theta'|^{\theta+\frac{1}{2}}.\log n$$

$$=An^{\theta+\frac{1}{2}}\log n(q|\theta'|)^{\frac{1}{2}}<An^{\theta+\frac{1}{2}}$$

$$\log n.n^{-\frac{1}{4}}=An^{\theta+\frac{1}{4}}\log n,$$

故对任何情况皆有（3.123）.由于$\theta\geqslant1/2$及由（3.121）可知

$$(3.124)\quad |\Phi|<An^{\theta+\frac{1}{4}}(\log n)^{A}.$$

3.13 注意$r\geqslant3$，所以

$$\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}}|\varphi|^{r-1}d\theta<Bh^{-(r-1)}$$

$$\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}}|Y|^{-(r-1)}d\theta<Bh^{-(r-1)}$$

$$\int_{0}^{\infty}(\eta^2+\theta^2)^{-\frac{1}{2}(r-1)}d\theta<Bh^{-(r-1)}n^{r-2};$$

故由（3.124）与（2.91）可知

(3.131) $$\sum_{p,q}\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}}|\Phi\varphi^{r-1}|d\theta<Bn^{r-2}(\max|\Phi|)$$

$$\sum_q h^{-(\ \ -2)}<Bn^{r-2+\theta+\frac{1}{4}}(\log n)^B$$

$$=Bn^{r-1+(\ \ -\frac{3}{4})}(\log n)^B,$$

3.14. 若 $\arg x=\psi$，则得

$$\sum\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}}|f|^2d\theta=\int_0^{2}|f|^2d\psi$$

$$=2\pi\sum_\omega(\log\omega)^2|x|^{2\omega}<A\sum_{m=2}\log m\Lambda(m)|x|^{2m}$$

$$<A(1-|x|^2)\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{m}\log k\Lambda(k)\right)|x|^{2m}$$

$$<A(1-|x|)\sum_{m=2}^{\infty}m\log m|x|^{2m}$$

$$<\frac{A}{1-|x|}\log\left(\frac{1}{1-|x|}\right)<An\log n.$$

类似地

$$|f|\leq\sum_\omega\log\omega|x|^\omega<\sum_m\Lambda(m)|x|^m<\frac{A}{1-|x|}$$

$$<An.$$

因此

(3.141) $$\sum_{p,q}\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}}|f|^{r-1}|\Phi|d\theta$$

$$\leq\max|\Phi f^{r-3}|\int_0^{2}|f|^2d\psi$$

$$<Bn^{+\frac{1}{4}}\log n . n^{r-3} . n\log n$$

$$<Bn^{-1+\left(r-\frac{3}{4}\right)}(\log n)^{B}.$$

由（3.116），（3.117），（3.119），（3.131）与（3.141）得

$$(3.142)\qquad \nu_r(n)=\sum e_q(-np)l_{p,q}$$

$$+O\left(n^{r-1+\left(\varrho-\frac{3}{4}\right)}(\log n)^{B}\right),$$

此处 $l_{p,q}$ 由（3.118）定义。

3.15　在 $l_{p,q}$ 中，我们记 $X=e^{-Y}$，$dX=-e^{-Y}dY$，则 Y 沿直线由 $\eta+i\theta_{p,q}$ 变至 $\eta-i\theta'_{p,q}$，所以由（2.822）与（3.118）得

$$(3.151)\qquad l_{p,q}=-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\mu(q)}{h}\right)^{r}$$

$$\int_{\eta+i\theta_{p,q}}^{\eta-i\theta'_{p,q}}Y^{-r}e^{nY}dY.$$

现在

$$(3.152)\qquad -\int_{\eta+i\theta_{p,q}}^{\eta-i\theta'_{p,q}}=\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty}Y^{-r}e^{nY}dY$$

$$+O\left(\int_{\theta_q}^{\infty}|\eta+i\theta|^{-r}d\theta\right)=2\pi i\frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$$

$$+O\left(\int_{\theta_q}^{\infty}|\eta+i\theta|^{-r}d\theta\right),$$

此处

$$\theta_q=\min_{p<q}(\theta_{p,q},\theta'_{p,q})\geq\frac{1}{2qN}.$$

又有

$$(3.153)\quad \int_{\theta_q}^{\infty}(\eta+i\theta)^{-r}d\theta<\int_{\theta_q}^{\infty}\theta^{-r}d\theta<B\theta_q^{1-r}$$

$$<B(q\sqrt{n})^{r-1}.$$

由(3.151),(3.152)与(3.153)可知

$$(3.154)\quad \sum e_q(-np)l_{p,q}=\frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$$

$$\sum_{p,q}\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r e_q(-np)+Q,$$

此处

$$(3.155)\quad |Q|<B\sum_{p,q}h^{-r}q^{r-1}n^{\frac{1}{2}(r-1)}<Bn^{\frac{1}{2}(r-1)}$$

$$\sum_{q}\left(\frac{q}{h}\right)^{r-1}<Bn^{\frac{1}{2}(r-1)}$$

$$\sum_{q=1}^{N}(\log q)^B<Bn^{\frac{1}{2}r}(\log n)^B.$$

因 $r\geqslant 3$ 及 $\theta\geqslant 1/2$, $\frac{1}{2}r<r-1-\frac{1}{4}<r-1+\left(\theta-\frac{3}{4}\right)$,

及由(3.142),(3.145)与(3.155)得

$$(3.156)\quad \nu_r(n)=\frac{n^{r-1}}{(r-1)!}\sum_{p,q}\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r e_q(-np)$$

$$+O(n^{r-1+\left(\theta-\frac{3}{4}\right)}(\log n)^B)$$

$$=\frac{n^{r-1}}{(r-1)!}\sum_{q\leqslant N}\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n)$$

$$+O(n^{r-1+\left(\theta-\frac{3}{4}\right)}(\log n)^B).$$

3.16. 为了完成定理 A 的证明, 我们仅需证明(3.156)

中有限级数可以换成 S_r，由于 $\frac{1}{2}r<r-1+(\theta-3/4)$ 及

$$\left|n^{r-1}\sum_{q>N}\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n)\right|$$
$$<Bn^{r-1}\sum_{q>N}q^{1-r}(\log q)^B<Bn^{\frac{1}{2}}(\cog n)^B,$$

因此这个误差可以吸收在（3.156）的第二项之中，定理证完。

奇异级数求和

3.21. 引 11.若

(3.211) $c_q(n)=\sum e_q(np)$,

此处 n 为一个正整数，求和范围为小于 q 且与 q 互素的所有正整数 p；当 $q=1$ 时，$p=0$ 包在内，否则不包在内，则

(3.212) $c_q(-n)=c_q(n)$;

(3.213) $c_{qq'}(n)=c_q(n)c_{q'}(n)$.

此处 $(q,q')=1$；及

(3.214) $c_q(n)=\sum\delta_\mu\left(\frac{q}{\delta}\right)$,

此处 δ 为 q 与 n 的公因子.

对应于 p 与 $q-p$ 的项是共轭的，所以 $c_q(\mathrm{n})$ 是实的，由于 $c_q(n)$ 与 $c_q(-n)$ 为互为共轭的，故得(3.121)[1]。

---

1) 若 $q=1$ 或 $q=2$，则推理有误；但 $c_1(n)=c_1(-n)=1, c_2(n)=c_2(-n)=-1$。

又可知

$$c_q(n)c_{q'}(n) = \sum_{p,\, p'} \exp\left(2n\pi i\left(\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}\right)\right)$$

$$= \sum_{p,\, p'} \exp\left(\frac{2nP\pi i}{qq'}\right),$$

此处

$$P = pq' + p'q.$$

当 p 过 $\varphi(q)$ 个正的，与 q 互素，且关于模 q 互不同余的整数，而 p' 过模 q' 的类似集合时，则 P 过一个 $\varphi(q)\varphi(q') = \varphi(qq')$ 个值的集合，其元素为正的，与 qq' 互素，且关于模 qq' 互不同余，故得(3.213)。

最后，显然有

$$\sum_{d|q} c_d(n) = \sum_{h=0}^{q-1} e_q(nh),$$

除去 $q|n$，它等于 q 之外，均取值 0，因此若记

$$\eta(q) = q(q|n),\quad \eta(q) = (q\times n),$$

则得

$$\sum_{d|q} c_d(n) = \eta(q),$$

所以由熟知的麦比乌斯反转公式[1]，得

$$c_q(n) = \sum_{d|q} \eta(d)\mu\left(\frac{q}{d}\right).$$

1） 兰岛，q.577.

这就是（3.214）[2]。

3.22. 引 12. 假定 $r2\geqslant$ 及

$$(3.221)\quad S_r=\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n).$$

则当 n 与 r 奇偶相异时

$$(3.222)\quad S_r=0,$$

否则

$$(3.223)\quad S_r=2C_r\prod_p\left(\frac{(p-1)^r+(-1)^r(p-1)}{(p-1)^r-(-1)_r}\right),$$

此处 p 表示 n 的奇素因子及

$$(3.224)\quad C_r=\prod_{\omega=3}^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^r}{(\omega-1)^r}\right).$$

命

---

2) 公式（3.214）是拉曼努扬证明的（'θn certain trigonometrical Sums and their applications in the theory of numbers' Trans. Camb. Phil. Soc; vol. 22（1918），pp.259—276（p.260））。兰岛已给出 $n=1$ 时的结果（Handbuch（1909），p.572：兰岛将它当作已知结果），一般情况则是耶申（Jensen）证明的（'Et nyt Udtryk for den talteoretiske Funktion $\Sigma\ \mu(n)=M(n)$'，Den 3 Skand. Mate. Kongres, Kristiania(1915), p.145)，拉曼努扬给出这个和很多漂亮的应用，所以可以用其名字来命名这个和。

(3.225) $\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n)=A_q$.

则当 $(q,q')=1$ 时

$$\mu(qq')=\mu(q)\mu(q'),\varphi(qq')=\varphi(q)\varphi(q'),$$

$$c_{q,q'}(-n)=c_q(-n)c_{q'}(-n),$$

所以(在相同假定下)

(3.226) $A_{qq'}=A_qA_{q'}$.

因此[1]

$$S_r=A_1+A_2+A_3+\cdots=1+A_2\cdots=\prod_\omega \chi_\omega,$$

此处

(3.227) $\chi_\omega=1+A_\omega+A_{\omega^2}+A_{\omega^3}+\cdots=1+A_\omega$,

这是由于因子 $\mu(q)$,所以 $A_{\omega^2},A_{\omega^3}$, $\cdots$ 都等于 0。

3.23. 若 $\omega|n$, 则

$$\mu(\omega)=-1,\varphi(\omega)=\omega-1,c_\omega(n)=\mu(\omega)=-1,$$

(3.231) $A_\omega=-\frac{(-1)^r}{(\omega-1)^r}$.

若另一方面 $\omega|n$, 则

$$c_\omega(n)=\mu(\omega)+\omega\mu(1)=\omega-1,$$

(3.232) $A_\omega=\frac{(-1)^r}{(\omega-1)^{r-1}}$.

---

1) 因 $|c_q(n)|\leqslant\Sigma\delta$,此处 $\delta|n$,所以 $c_q(n)=O(1)$(当 n 固定及 $q\to\infty$),又由引 10 可知 $\varphi(q)>Aq(\log q)^{-A}$,因此我们研究的级数与乘积是绝对收敛的。

因此

$$(3.233)\quad S_r\prod_{\omega n}\left(1+\frac{(-1)^r}{(\omega-1)^{r-1}}\right)\prod_{\omega\nmid n}\left(1-\frac{(-1)^r}{(\omega-1)^r}\right).$$

若 n 为偶及 r 为奇，则由 $\tilde{\omega}=2$ 对应的因子可知第一个因子为零；若 n 为奇及 r 为偶，则类似地第二个因子为零，故当 n 与 r 奇偶相异时有 $S_r=0$。

若 n 与 r 奇偶相同时，$\omega=2$ 对应的因子恒等于 2；及如引理所示

$$S_r=2\prod_{\omega=3}\left(1-\frac{(-1)^r}{(\tilde{\omega}-1)^r}\right)\prod_p\left(\frac{(p-1)^r+(-1)^r(p-1)}{(p-1)^r-(-1)^r}\right),$$

最后公式的证明

3.3. 定理 B.假定 $r\geqslant3$，则当 n 与 r 奇偶相异时有

$$(3.31)\quad \nu_r(n)=0(n^{r-1}).$$

但当 n 与 r 奇偶相同时有

$$(3.32)\quad \nu_r(n)\backsim\frac{2C_r}{(r-1)!}n^{r-1}\prod_p\left(\frac{(p-1)^r+(-1)^r(p-1)}{(p-1)^r-(-1)^r}\right),$$

此处 p 为 n 的奇素因子及

$$(3.33)\quad C_r=\prod_{\omega=3}^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^r}{(\tilde{\omega}-1)^r}\right).$$

这可以由定理 A 及引 12 直接推出来[1]

3.4. 引 13. 若 $r\geqslant 3$ 及 n 与 r 奇偶相同，则当 $n\geqslant n_0(r)$ 时有

$$\nu_r(n)>Bn^{r-1}.$$

在证明定理 C 时要用到这条引理，若 r 为偶数，则

$$\prod\left(\frac{(p-1)^r+p-1}{(p-1)^r-1}\right)>1.$$

若 r 为奇数，则

$$\prod\left(\frac{(p-1)^r-p+1}{(p-1)^r+1}\right)>\prod\left(\frac{(p-1)^r-p}{(p-1)^r}\right)$$

$$>\prod_{\omega=3}^{\infty}\left(1-\frac{\omega}{(\omega-1)^s}\right)=A.$$

在任何情况下，由（3.32）可得引理之结论。

3.5. 定理 C. 若 $r\geqslant 3$ 及 n 与 r 奇偶相同，则

$$N_r(n)\infty\frac{\nu_r(n)}{(\log n)^r}. \tag{3.51}$$

首先可见

$$N_r(n)=\sum_{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_r=n}1\leqq\sum_{m_1+m_2+\cdots+m_r=n}1-<Bn^{r-1}$$

及

$$\nu_r(n)=\sum_{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_r=n}\log\omega_1\cdots\log\omega_r\leqq \tag{3.511}$$

---

1) 与此等价的结果载于我们文(2) 的公式（5.11）—（5.22），但有误，每个公式少一个因子$(\log n)^{-r}$
这是由于将 $\nu_r(n)$ 与 $N_r(n)$ 弄混淆所致。文（2)中的 $\nu_r(n)$ 即本文之 $N_r(n)$。

$$(\log n)^r N_r(n) < Bn^{r-1}(\log n)^r.$$

记

$$(3.512)\quad \nu_r = \nu'_r + \nu''_r,\ N_r = N'_r + N''_r,$$

此处ν'_r与N'_r包含求和中适合于

$$\omega_s \geq n^{1-\delta}\quad (0<\delta<1,\ s=1,2,\cdots,r)$$

的所有项，则显然

$$(3.513)\quad \nu'_r(n) \geq (1-\delta)^r(\log n)^r N'_r(n).$$

又可知

$$N''_r(n) \leq r \sum_{\omega_r < n^{1-\delta}} \left(\sum_{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{r-1}=n-\omega_r} 1 \right)$$

$$< B \sum_{\omega_r < n^{1-\delta}} N_{r-1}(n-\omega_r) < Bn^{1-\delta}\cdot n^{r-2}$$

$$< Bn^{r-1-\delta},$$

$$\nu''_r(n) \leq (\log n)^r N''_r(n) < Bn^{r-1-\delta}(\log n)^r.$$

但当$n \geqslant n_0(r)$时，$\nu_r(n) > Bn^{r-1}$（引 13），所以对于每一正数δ皆有

$$(3.514)\quad (\log n)^r N''_r(n) = o(\nu_r(n)),$$

$$\nu''_r(n) = o(\nu_r(n)),$$

由(3.511)，(3.512)，(3.513)与(3.514)可知

$$(1-\delta)^r(\log n)^r(N_r - N''_r) \leq \nu_r - \nu''_r$$

$$\leq (\log n)^r N_r,$$

$$(1-\delta)^r(\log n)^r N_r \leq \nu_r + o(\nu_r) \leq (\log n)^r N_r,$$

$$(1-\delta)^r \leq \underline{\lim} \frac{\nu_r}{(\log n)^r N_r},\quad \overline{\lim} \frac{\nu_r}{(\log n)_r N_r} \leq 1,$$

因δ是任意的，故得（3.51）.

3.6. 定理 D，每个大奇数 n 都是三个奇素数之和，表示法个数$\overline{N}_3(n)$的渐近公式为

$$(3.61)\quad \overline{N}_3(n)\backsim C_3\frac{n^2}{(\log n)^3}\prod\left(\frac{(p-1)(p-2)}{p^2-3p+3}\right),$$

此处 p 为n 的一个素因子及

$$(3.62)\quad C^3=\prod_{\omega=3}^{\infty}\left(1+\frac{1}{(\omega-1)^3}\right).$$

这几乎是定理 B 与 C 的直接推论，这些定理给出 $N_3(n)$的对应公式，若非所有素数为奇的，则必两个为 2 及 $n-4$ 为素数，这种表示法的个数最多只有一个。

定理 E. 每个大偶数 n 为四个奇素数之和（自然地，其中的一个可以预先确定），表示法的总数有渐近公式

$$(3.63)\quad \overline{N}_4(n)\backsim\frac{1}{3}C_4\frac{n^3}{(\log n)^4}\prod\left(\frac{(p-1)(p^2-3p+3)}{(p-2)(p^2-2p+2)}\right),$$

此处 p 为 n 的一个奇素数因子及

$$(3.64)\quad C_4=\prod_{\omega=3}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(\omega-1)^4}\right).$$

这也是这两条定理的推论，我们仅需注意者，非全为奇素数的四个素数和的表示法的总和为 $O(n)$，对于更大的 r，我们有完全类似的结果。

4.关于“哥德巴赫定理”的注记

4.1 当 $r=2$ 时,我们的方法失败了,对于主项,它没有失

败，因它得到一个看来是正确的结果；但即使假定 $\theta=\frac{1}{2}$，我们亦不能克服证明中的难点。我们能得到的最佳误差上界估计亦嫌大，略言之，大了一个因子 $n^{\frac{1}{4}}$.

由我们的方法可以得到的公式包含于

猜想 A. 每个大偶数为两个奇素数之和. 表示法的个数的渐近公式为

$$(4.11)\quad N_2(n)\backsim 2C_2\frac{n}{(\log n)^2}\prod_p\left(\frac{p-1}{p-2}\right),$$

此处 p 为 n 的一个奇素因子及

$$(4.12)\quad C_2=\prod_{\omega=3}\left(1-\frac{1}{(\omega-1)^2}\right).$$

我们说几句关于这个公式的历史的话，其真实性由经验检证[1].

这种性质的第一个确切结果是属于西尔怀斯特（Sylvester)[2]的，他在1871发表于 Proceedings of London

1) 关于"哥德巴赫定理"较早的历史，见狄克逊，Historg of the theory of Numbers, vol.1(Washington 1919), pp.421—425,

2) J.J.Sylvester,'On the partition of an even number into two primes',Proc.London Math.Soc.,ser.1.vol.4 (1871),pp.4—6 (Math.Papers,vol.2,pp.709—711). See also 'On the Goldbach-Euler Theorem regarding prime numbers',Nature,vol.55 (1896—7),pp.

Mathematical Society 上的一篇短文中建议

$$(4.13)\quad N_2(n)\backsim\frac{2n}{\log n}\prod\left(\frac{\omega-2}{\omega-1}\right),$$

此处

$$3\leqslant\omega<\sqrt{n},\quad \omega\nmid n.$$

由于

$$\prod_{\omega<\sqrt{n}}\left(\frac{\omega-2}{\omega-1}\right)=\prod_{\omega<\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{(\omega-1)^2}\right)$$

$$\prod_{\omega<\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\backsim C_2\prod_{\omega<\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\omega}\right),$$

及[2)]

$$(4.14)\quad \prod_{\omega<\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\backsim\frac{2e^{-C}}{\log n},$$

此处 C 为欧拉常数，（4.13）等价于

$$(4.15)\quad N_2(n)\backsim 4e^{-C}C_2\frac{n}{(\log n)^2}\prod_p\left(\frac{p-1}{p-2}\right),$$

这与（4.11）相矛盾，这两个公式相差一个因子 $2e^{-C}=1.123\cdots$，我们将在 4.2 中证明（4.11）是这种类型公式中唯一可能正确者，所以西尔怀斯特公式是错误的，但西尔怀

---

2)196—197,269(Math.papers, vol.4,734—737)

关于西尔怀斯特文章的知识与剑桥大学三一学院的威尔逊（Wilson）先生有关。见 Shah 与 Wilson (1)，及哈代与李特伍德（2）。

3) 兰岛，p.218.

斯特是第一个找到与$N_2(n)$不规则性有关的因子

$$(4.16)\quad \prod\left(\frac{p-1}{p-2}\right),$$

者，但没有充分证据来表明他是如何得到他的结果的。

1896年，史泰克尔[1]（Stackel）建议了一个完全不同的公式

$$N_2(n)\backsim\frac{n}{(\log n)^2}\prod\left(\frac{p}{p-1}\right).$$

这个公式中没有引进因子（4.16），而且事实上并未给出好的逼近；1900年，兰岛[2]证明无论如何这个公式也是不对的。

在1915年，麦尔林（Merlin）[3]有一篇关于哥德巴赫定理的未完成的论文，麦尔林未给出一个完全的渐近公式，但他亦认识到（如西尔怀斯特一样）因子（4.16）的重要性。

---

1) P. Stackel, 'Über Goldbach's empirisches Theorem: Jede grade Zahl kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden', Göttinger Nachrichten, 1896, pp.292—299.

2) E. Landau. 'Über die zahlentheoretische Funktion $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satz', Göttinger Nachrichten, 1900, pp.177—186.

3) J. Merlin, 'Un travail sur les nombres premiers', Bulletin des sciences mathematiques, vol.39(1915), pp.121—136.

差不多同一时间，布朗[1]研究了这个问题，由布朗方法很自然地得到公式

$$(4.17)\quad N_2(n) \backsim 2Hn \prod_p \left(\frac{p-1}{p-2} \right),$$

此处

$$(4.171)\quad H = \prod_{3 \leq \omega \leq \sqrt{n}} \left(1 - \frac{2}{\omega} \right).$$

很容易证明它等价于

$$(4.18)\quad N_2(n) \backsim 8e^{-2\gamma} C_2 \frac{n}{(\log n)^2} \prod_p \left(\frac{p-1}{p-2} \right),$$

它与（4.11）相差一个因子 $4e^{-2C} = 1.263\cdots$. 4.2 的论证将表明如同西尔怀斯特公式一样，这个公式也是不正确的．

最后，在 1916 年，斯泰克尔[2]在发表于 Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaft-

---

1) V. Brun, Über das Goldbachsche Gesatz und die Anzahl der primzahlpaare', Archiv for Mathematik (Christiania), vol. 34, part 2 (1915), no. 8, pp. 1—15. 公式（4. 18）实际上并非布朗形成的；见 Shah and Wilson(1)，及 Hardy and Littleroood(2)的讨论，亦见布朗的第二篇文章，'Sur les nombres premiers de la forme ap+b, ibid; part 4(1917) no. 14, pp. 1—9；及本文之附录．

2) P. Stäckel, 'Die Darstellung der geraden Zahlen als Summen von zwei Primzahlen', 8 August

en 上的一系列论文上，又回到这个主题，直到最近我们尚未论及，在我们文章的最后注记中将给出关于这些文章的进一步注记。

4.2 今往证明我们的结论，即（4.15）与（4.18）是不正确的。

定理 F，假定[1]当

$$n = 2^{\alpha} p^{a} p'^{a'} \cdots \quad (\alpha > 0, a, a', \cdots > 0),$$

时有

$$(4.21) \quad N_2(n) \backsim A \frac{n}{(\log n)^2} \prod_p \left(\frac{p-1}{p-2} \right),$$

及当 n 为奇数时

$$(4.22) \quad N_2(n) = 0\left(\frac{n}{(\log n)^2} \right),$$

则

$$(4.23) \quad A = 2C_2 = \prod_{\omega=3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(\omega-1)^2} \right).$$

记

$$(4.24) \quad \Omega(n) = An \prod_p \left(\frac{p-1}{p-2} \right) \ (n \text{ 偶}), \Omega(n) = 0 \ (n$$

---

2) 1916; 'Die Luckenzahlen r·ter Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summen und Differenzen ungerader Primzahlen'I. Teil 27 Dezember 1917, II. Teil 19 Januar 1918, III. Teil 19 Juli 1918.

1) 在整个 4.2 中，A 表示同一常数。

奇)．则由（4.21）与定理 C 得

(4.25) $$\nu_2(n)=\sum_{\omega+\omega'=n}\log\omega\log\omega'\backsim\Omega(n),$$

这被了解为，当 n 为奇数时；这公式的含义为

$$\nu_2(n)=o(n).$$

进一步，命

$$f(s)=\sum\frac{\Omega(n)}{n^s}=\frac{\Omega(n)}{\sum n^{1+u}},$$

若 $R(s)>2$，$R(u)>1$，则这些级数是绝对汝敛的。所以

(4.26) $$f(s)=A\sum_{n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)}n^{-u}\prod_p\left(\frac{p-1}{p-2}\right)$$

$$=A\sum_{\alpha>0}2^{-\alpha u}p^{-a u}p'^{-a' u}\cdots$$

$$\frac{(p-1)(p'-1)\cdots}{(p-2)(p'-2)\cdots}=\frac{2^{-u}A}{1-2^{-u}}\prod_{\omega=3}^{\infty}$$

$$\left(1+\frac{\omega-1}{\omega-2}\frac{\omega^{-u}}{1-\omega^{-u}}\right)$$

$$=\frac{2^{-u}A}{1-2^{-u}}\xi(u),$$

现在假定 $u\to1$，及命

$$\eta(u)=\prod_{\omega=3}^{\infty}\left(1+\frac{\omega^{-u}}{1-\omega^{-u}}\right)=\prod_{\omega=3}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\omega^{-u}}\right)$$

$$=(1-2^{-u})\zeta(u).$$

则

$$\frac{\xi(u)}{\eta(u)}=\prod\left(\left(1+\frac{\omega-1}{\omega-2}\frac{\omega^{-u}}{1-\omega^{-u}}\right)\Big/\right.$$

$$\left.\left(1+\frac{\omega^{-u}}{1-\omega^{-u}}\right)\right)-\prod\left(\left(1+\frac{1}{\omega-2}\right)\Big/\right.$$

$$\left.\left(1+\frac{1}{\omega-1}\right)\right)=\prod\left(\frac{(\omega-1)^2}{\omega(\omega-2)}\right)$$

$$=\prod\left(\frac{(\omega-1)^2}{(\omega-1)^2-1}\right)=\frac{1}{C_2}.$$

因此

$$(4.27)\quad f(s)\backsim A\xi(u)\backsim\frac{A}{C_2}\eta(u)\backsim\frac{A}{2C_2}\zeta(u)\backsim$$

$$\frac{A}{2C_2(n-1)}=\frac{A}{2C_2(s-2)}.$$

另一方面，当 $x\to1$ 时有

$$\sum\nu_2(n)x^n\backsim\left(\sum\log\ \omega x^{\omega}\right)^2\backsim\frac{1}{(1-x)^2},$$

所以[1]

1） 我们在此用到我们的文章 'Tauherian theorems concerning power series and Dirichler's series whose coefficients are positive', Proc. London Math. Soc, Ser.2, vol.13, pp.174—192.这是一个最快的证明，但并非最初等者。应用4.1中征引的兰岛的文章可知（4.18）等价于公式.

$$\sum_1^n N_2(m)\backsim\frac{n^2}{2(\log n)^2}$$

(4.28) $\nu_2(1)+\nu_2(2)+\cdots+\nu_2(n)\backsim\frac{1}{2}n^2$

用初等运算[1]可知当 $s\to2$ 时有

$$g(s)=\sum\frac{\nu_2(n)}{n^s}\backsim\sum\frac{1}{n^{s-1}}\backsim\frac{1}{s-2}.$$

所以[1]（在假定(4.21)与(4.22)之下）

(4.29) $f(s)\backsim\frac{1}{s-2}$.

比较（4.27）与（4.29）即得定理的结果。

4.3 无论西尔怀斯特公式还是布朗公式皆包有一个错误的因子，在每一情况下，这个因子都是 e^{-C} 的简单函数，故并不很严重。

首先我们注意到素数论中的任何公式，若它们是由概率的考虑推导出来的，常常可能有这样的错误。例如，考虑这样的问题"一个大数 n 是一个素数的'概率'是多少？"我们已知"概率"渐近于 $\frac{1}{\log n}$.

但现在已知 n 不被任何小于固定数 x 的素数整除的"概率"渐近于

$$\prod_{w<\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\omega}\right).$$

1) 对于一般的定理，包括用到这里的一些特例，见K. Knopp, 'Divergenzcharactere gewisser Dirichlet'scher Reihen', Acta Math; vol.34, 1909, pp.165—204(定理Ⅳ, p.176).

由于很自然地推出[1]所欲求的“概率”渐近于

$$\prod_{\omega<\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\omega}\right).$$

但[2]

$$\prod_{\omega<\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\sim\frac{2e^{-C}}{\log n},$$

所以上面这一推论是不正确的，它多了一个因子 $2e^{-C}$。

布朗的论证中确未用到概率的语言[3]，但是他用了不严格的趋限，这如上述论证方法有同样的性质，布朗首先发现（天才地运用“埃拉朵斯柴尼氏筛法”）将 n 表示为两个素因子个数不超过固定数的整数之和的表示法的渐近公式，这个公式是对的，因此它是上述论证中的第一步；它在于枚举各种可能，所有涉及“概率”[4]处均可去掉。正是在趋限时导至了错误，在各种情况下，错误的性质是同样的。

4.4 夏（Shah）与威尔逊广泛地检验了猜想 A，与康妥（Cantor）、奥锐（Aubry）、哈斯勒尔（Haussner)及李坡尔特（Ripert）收集的经验数据相比较。我们复印了他

1） 我们可以将 $\omega<\sqrt{n}$ 换成 $\omega<n$，则所得“概率”减少一半，这个事实本身就足以说明论证是不充分的。

2） 兰岛，p.218。

3） 西尔怀斯特论证中是否用到“概率”，我们尚不能判断。

4） 概率并非纯数学的一个标志，它是属于哲学与物理的标志。

们结果的表格，但需作些注记。首先重要的，其数值检证如公式（4.11）的 $N_2(n)$，而不是如（4.25）的 $\nu_2(n)$。我们的分析正相反，首先应是 $\nu_2(n)$，而 $N_2(n)$的公式则是第二位的。为了导出 $N_2(n)$的渐近公式，我们有

$$\nu_2(n)=\sum_{\omega+\omega'=n}\log\omega\log\ \omega'\backsim(\log n)^2N_2(n).$$

因子$(\log n)^2$只是阶 $\log n$ 的错误，更为自然地[1]为将 $\nu_2(n)$ 换为

$$((\log n)^2-2\log n+\cdots)N_2(n).$$

对于我们采用的变换，渐近公式自然是无差别的。但以一定范围内验证为目的，则是有区别的，因 $\log n$ 的项并非可以忽略不计的，它对于结果的似真性有巨大差异。基于这些考虑，夏与威尔逊不搞公式（4.11），而搞一个修改过的公式

$$N_2(\mathrm{n})\backsim\rho(n)=2C_2\frac{n}{(\log n)^2-2\log n}\prod_p\left(\frac{p-1}{p-2}\right).$$

这种错误对过去一系列误解有关。因此（如夏与威尔逊指出）[2]在附表给出的值 n 的范围内，西尔怀斯特的公式确实比未经修改的公式（4.11）得到的结果好。

还有次重要的一点注记：在我们的分析中，最自然的函数不是

1） 比较 Shah and Wilson(1), p.238. 用其他方法也可以得到相同的结论。

2） Shah and Wilson(1), p.242.

$$f(x)=\sum \log \omega x^{\omega},$$

而是

$$g(x)=\sum \Lambda(n)x^{n}=\sum_{\omega,\,l}\log\omega x^{\omega^{l}}.$$

对应的数值函数不是$\nu_2(n)$与$N_2(n)$，而是

$$g_2(n)=\sum_{m+m'=n}\Lambda(m)\Lambda(m'),\quad Q_2(n)=\sum_{\omega^l+\varpi^l=n}1$$

（因此$Q_2(n)$为将n表为两个素数或素数幂的表示法个数）。$N_2(n)$与$Q_2(n)$是渐近等价的，它们的差异为低阶的，低于任何情况下我们所忽略者，当n（不可避免地）的值不太大时，将它作为以后作比较的基础。

在附表中，表示为两个素数之和及素数幂之和的表示法是分开算的；但以其总和与$\rho(n)$比较.常数$2C_2$为1.3203。可以看出计算值与真值之间的对应是良好的。

附　　表

n	$Q_2(n)$	$\rho(n)$	$Q_2(n):\rho(n)$
$30=2.3.5$	$6+4=10$	22	0.45
$32=2^5$	$4+7=11$	8	1.38
$34=2.17$	$7+6=13$	9	1.44
$36=2^2.3^2$	$8+8=16$	17	0.94
$210=2.3.5.7$	$42+0=42$	49	0.85
$214=2.107$	$17+0=17$	16	1.07
$216=2^3.3^3$	$28+0=28$	32	0.88
$256=2^8$	$16+3=19$	17	1.10

续表

n	$Q_2(n)$	$\rho(n)$	$Q_2(n)/\rho(n)$
$2,048=2^{11}$	$50+17=67$	63	1.06
$2,250=2.3^2.5^3$	$174+26=200$	179	1.11
$2,304=2^8.3^2$	$134+8=142$	136	1.04
$2,306=2.1153$	$67+20=87$	69	1.26
$2,310=2.3.5.7.11$	$228+6=244$	244	1.00
$3,888=2^4.3^5$	$136+$[illegible]$=210$	107	1.06
$3,898=2.1949$	$99+6=105$	99	1.06
$3,990=2.3.5.7.19$	$328+20=348$	342	1.02
$4,096=2^{12}$	$104+5=109$	107	1.06
$4,996=2^2.1249$	$124+16=140$	119	1.18
$4,998=2.3.7^2.17$	$223+2$[illegible]$=308$	305	1.01
$5,000=2^3.5^4$	$150+26=176$	157	1.12
$8,190=2.3^2.5.7.13$	$578+26=604$	597	1.01
$8,192=2^{13}$	$150+32=182$	171	1.06
$8,194=2.17.241$	$192+10=202$	219	0.92
$10,008=2^2.3^2.139$	$388+30=418$	396	1.06
$10,010=2.5.7.11.13$	$384+36==420$	384	1.09
$10,014=2.3.1669$	$408+8=416$	396	1.05
$30,030=2.3.5,7,11.13$	$1,800+54=1854$	1795	1.03
$36,960=2^5.3.5.7.11$	$1,956+38=1994$	1937	1.03
$39,270=2.3.5.7.11.17$	$2,152+36=2188$	2213	0.99
$41,580=2^2.3^3.5.7.11$	$2,140+44=2184$	2125	1.03
$50,026=2.25013$	$702+8=710$	692	1.03
$50.144=2^5.1567$	$607+99=706$	694	1.02
$170,166=2.3.79.359$	$3,734+46=3780$	3762	1.00
$170,170=2.5.7.11.13.17$	$3,734+8=3792$	3841	0.99
$170,172=2^2.3^2.29.163$	$3,732+48=3780$	3866	0.98

编者注：我们略去论文的其余部分，在那里包含了仅考虑优弧，用圆法得到的有关其他许多堆垒问题的猜想。

2. 表奇数为三个素数之和

依.麦.维诺格拉朵夫

我的方法在素数论中的应用的一些简单例子已于1934(1)中给出.

本文，我们给出这个方法在和

$$\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}$$

的估计方面的应用。运用这一估计及一条算术级数中素数分布的新定理（数列中的项之差与项数同时缓慢增加），我得到将一个奇数 $N>0$ 表示为

$$N=p_1+p_2+p_3$$

的表示法的渐近公式，由此直接推出每个大奇数都是三个素数之和，这是关于奇数的哥德巴赫问题的完全解决。

本文给出的估计可以换成更准确的估计。

记号，$N>0$ 为一个大奇数；$n=\log N$。

$h,h_1,h_2,\cdots$ 为任意大常数 >3；

$$\tau=Nn^{-3h};\quad \tau_1=Nn^{-h};$$

θ 为实数及 $|\theta|\leqslant 1$；

$$A\ll B;\quad A=0(B)$$

表示 $|A|/B$ 不超过某一常数；

不超过 $\sqrt{N}$ 的所有素数的乘积记为 H，(d) 表示满足 $d\leqslant N$ 的 H 的因子的集合；(d_0)表示(d)的子集，其中 d 具

有偶数个素因子；(d_1)为具有奇数个素因子的 d 构成的子集，集合(d)亦可分成两个集合(d')与(d'')。前者包含这样的数 d，其素因子皆

$$\leqslant n^{3h},$$

后者包含其余的 d。

集合(d_0)与(d_1)亦对应地分成集合 (d'_0)，(d''_0) 与 (d'_1)，(d''_1)。

引 1．命 (x)与(y)表示两个递增的正整数集合；

$$1<U_0<U_1\leqslant N_1\leqslant N;$$

m 为正整数；

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q\tau};\ (a,q)=1;\ 0<q\leqslant\tau;\ m=m_1\delta;$$

$$q=q_1\delta;\ \delta=(m,q);\quad T=\sum_x\sum_y e^{2\pi i\alpha mxy}.$$

此处 x 过(x)中适合

$$U_0<x\leqslant U_1$$

的数，而给予 x 后，y 过(y) 中适合

$$0<y\leqslant N_1/x$$

的数．则

$$T\ll N_1 n\sqrt{\frac{n}{U_0}+\frac{U_1}{N_1}+\frac{q_1 n}{N_1}+\frac{1}{q_1}+\frac{m_1}{\tau}}.$$

定理 1．命

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^c};\ (a,q)=1;\ n^{3h}\leqslant q\leqslant\tau.$$

则得

$$S=\sum_{p\leqslant N}e^{2\pi i\alpha p}\ll Nn^{2-h}.$$

证：我们有

$$S=\sum_{(d)}\mu(d)S_d+O(\sqrt{N});\quad S_d=\sum_{m=1}^{\frac{N}{d}}e^{2\pi i\alpha md},\tag{1}$$

所以

$$\begin{aligned}S&=\sum_{d>t_1}\mu(d)S_d+O(Nn^{-l+1})\\&=T_0-T_1+O(Nn^{-l+1});\end{aligned}$$

$$T_0=\sum_{(d_0)}S_d;\quad T_1=\sum_{(d_1)}S_d,\tag{2}$$

此处 d 过$>\tau_1$的值。我们仅仅估计 T_0，而 T_1 的估计是类似的。

交换求和次序得

$$T_0=\sum_m T(m);\quad T(m)=\sum_d e^{2\pi i\alpha md},\tag{3}$$

此处 m 过下列诸数

$$m=1,\cdots,[n^h],$$

而对于每个 m，d 过以下诸数

$$\tau_1<d\leqslant N/m.$$

进而言之，我们有

$$T(m)=T''(m)+O\left(\frac{N}{m}n^{-h}\right),\tag{4}$$

此处 $T''(m)$ 含有 $T(m)$ 中对应于集合 (d''_0) 的那些项。$T(m)$

的对应于 d_0' 的部分 $T'(m)$ 不超过 (d') 中不超过 N/m 的项数，这个数的阶大大地小于

$$\frac{N}{m} n^{-h}.$$

若 $d \in (d_0'')$ 及 k 为 d 的超过 n^{3h} 的素因子个数，则

$$k < n.$$

所以

$$T''(m) = \sum_{k<n} T_k(m), \tag{5}$$

此处 $T_k(m)$ 包含 $T''(m)$ 的那些项，其中 d 正好含有 k 个素因子 $> n^{3h}$。进而言之，

$$T_k(m) = \frac{1}{k} T_{k0}(m) + O\left(\frac{N}{mk} n^{-3h}\right), \tag{6}$$

此处

$$T_{k0}(m) = \sum_u \sum_v e^{2\pi i a m u v}.$$

及 u 过属于 (d) 且 $\geqslant n^{3h}$ 的素数，而固定 u，v 过属于 (d_1) 且满足

$$\frac{\tau_1}{u} < v \leqslant \frac{N}{mu}$$

的整数，直接应用引 1，我们得

$$T_{k0}(m) \ll N \frac{n^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}h}}{\sqrt{m}},$$

所以由(6)，(5)，(4)，(3)，(2)即得定理 1。

定理 2。命 I_N 表示

$$N = p_1 + p_2 + p_3$$

的表示法个数，则

$$I_N = RS + O(N^2 n^{-c}),$$

此处 c 为任意大常数>3 及

$$S = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{q_1^2} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ (a,q)=1}} e^{2\pi i \frac{a}{q} N};$$

$$R = \frac{N^2}{2n^3}(1+\lambda); \quad \lim_{N\to\infty}\lambda = 0; \quad q_1 = \varphi(q).$$

证：a）我们有

$$I_N = \int_0^1 S_\alpha^3 e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha; \quad S_\alpha = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p}.$$

我们划分积分区间为两类：

1. $\alpha = \frac{a}{q} + z$；$(a,q) = 1$；$0 < q \leqslant n^{3h}$，$-\frac{1}{\tau} \leqslant z \leqslant \frac{1}{\tau}$.

2. 剩余的诸区间；对于这些区间有

$$\alpha = \frac{d}{q} + z; \quad (a,q) = 1; \quad n^{3h} < q \leqslant \tau; \quad |z| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

对应于这种分割，我们有

$$I_N = I_{N1} + I_{N2}. \tag{7}$$

b） 由定理 1 我们得

$$I_{N2} \ll N n^{2-h} \int_0^1 |S_\alpha|^2 d\alpha \ll N n^{2-h} \int_0^1 \sum_{p \leqslant N} \sum_{p_1 \leqslant N} e^{2\pi i \alpha (p - p_1)} d\alpha \ll N n^{2-h} \frac{N}{n} \ll N^2 n^{1-h}. \tag{8}$$

c） I_{N1} 的估计是没有困难的。它与华林问题的做法是

一样的，但这里我们用到算术级数中素数分布的一条新定理，若α属于第一类区间，则

$$S_{\alpha}=\frac{\mu(q)}{q_1}V(z)+O(Nn^{-\lambda_1});$$

$$V(z)=\int_{2}^{N}\frac{e^{2\pi i z x}}{\log x}dx.$$

因此I_{N1}对应于分数$\frac{a}{q}$的部分可以表为

$$R\frac{\mu(q)}{q_1^3}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}+O(Nn^{-\lambda_2});$$

$$R=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}[V(z)]^3e^{-2\pi i zN}dz,$$

此处R可以表示为

$$R=\frac{N^2}{2n^3}(1+\lambda);\quad \lim_{N\to\infty}\lambda=0.$$

因此我们容易算出

$$I_{N1}=RS+O(N^2n^{-\lambda_3}).$$

故由(7),(8)即得定理.

参 考 文 献

1. I.M.Vinogradov,Dokl,Akad.Nauk,Ⅲ,1,IV,4(1934).
2. A.Walfitg,Math.ZS;40(1936).

3. 哥德巴赫-维诺格拉朵夫定理的新证明

林　尼　克

§ 1.

在我的论文《On the possibility of a method for Some "additive" and "distributive" problems in the theory of prime numbers》[1]中，我概要地给出了哥德巴赫问题的一个证明，它基于 L-级数与围道积分的纯黎曼-阿达玛方法与 L一级数零点密度的某些定理。

本文，我给出用黎曼-阿达玛方法证明三素数定理的详细过程，从而哈代-李特伍德的条件解决被完全解决了。

§ 2.

我们的基本工具为下述引理，其详细证明含于我的文章《Qn the density of the zeros of L-series》[3]中，

基本引理，命 q 为一个自然数，χ 为一个原特征 $(\mathrm{mod}\, q)$ 及 $L\ (\omega,\chi)$ 为它对应的 L-级数。命

$$\omega=\sigma+it,T\geqslant q^{50},\beta\geqslant 1 \text{ 及 } \nu=\beta-\frac{1}{2}\geqslant 0.$$

则 $L(\omega,\chi)$ 在矩形 $\beta\leqslant\sigma\leqslant 1$，$|t|\leqslant T$ 中的零点个数满足估计

$$Q(\beta,T)<c_1q^{2\nu}T^{1-\frac{\nu}{1-\nu}}\ \ln^{10}T+c_2q^{30}, \qquad (1)$$

此处 c_1 与 c_2 为绝对常数。

§ 3.

命

$$S(N,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\,e^{-\frac{n}{N}}e^{-2\pi i n\theta},$$

此处 N 为一个奇数，我们希望把它分解成三个素数之和，则

$$Q(N)=e\int_0^1 S(N,\theta)^3 e^{2\pi i N\theta}d\theta+O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

此处

$$Q(N)=\sum_{p+p'+p''=N}\ln p\ln p'\ln p''.$$

命

$$r=\ln N,\ \tau=r^{10,000},\ H_1=\tau^{100}.$$

对于每个 $\theta\in[0,1]$，我们有连分数逼近

$$\theta=\frac{a}{q}+\alpha,\ |\alpha|\leqslant\frac{1}{q\tau},\ q\leqslant\tau. \tag{2}$$

满足 $|\alpha|\leqslant H_1N^{-1}=\tau^{100}N^{-1}$ 的那些 θ 构成的集合 M 称为“优弧”〔2〕.

当 $\theta\in M$ 时，$S(N,\theta)$ 的渐近性质可以由经典的黎曼-阿达玛方法结合西革尔〔4〕与帕奇〔5〕定理来建立，因此积分

$$\int_M S(N,\theta)^3e^{2\pi iN\theta}d\theta$$

构成了我们问题的主项.

我们用 m 表示 M 相对于〔0.1〕的余区间.

对于 $\theta\in m$，我们有

$$\theta=\frac{a}{q}+\alpha,\quad \frac{1}{q\tau}\geqslant|\alpha|\geqslant\frac{H_1}{N},\quad q\leqslant\tau. \tag{3}$$

我们现在来证明当 $\theta\in m$ 时，$S(N,\theta)$的估计可以由黎曼-阿达玛方法来建立。

§ 4.

我们用 χ 表示一个原特征（mod$q$），此处 q 满足(3)；$E(\chi)=1$，此处 χ 为主特征，否则 $E(x)=0$；及 ρ 表示 $L(\omega,\chi)$的一个非寻常零点。

假定 x 满足 $R_e x>0$，则由李持伍德〔6〕的推导可知，若 $L(0,\chi)\neq 0$，则

$$S(N,\alpha,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\Lambda(n)e^{-nx}$$

$$=E(\chi)x^{-1}-\sum_{\rho}x^{-\rho}\Gamma(\rho)-\frac{L'}{L}(0,\chi)$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty}x^{-\omega}\left(-\frac{L'}{L}(\omega,\chi)\right)$$

$$\Gamma(\omega)d\omega,$$

而当 $L(0,\chi)=0$ 时的证明并无实质改变。

命 $x=N^{-1}+2\pi i\alpha$，此处 α 满足（3）。则$|x|<1$。

为了估计余项

$$R=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty}x^{-\omega}\left(-\frac{L'}{L}(\omega,\chi)\right)\Gamma(\omega)d\omega,$$

我们注意当$\sigma=-\frac{1}{2}$时

$$\frac{L'}{L}(\omega,\chi)\ll\ln q(|t|+2),$$

$$x^{-\omega}=e^{-\omega\ln|x|-i\omega\operatorname{arc}x},$$

$$|e^{-\omega\ln|x|}|<1,\quad |e^{-i\omega\operatorname{arc}x}|\leqslant e^{|t|\operatorname{arc}x},$$

$$\Gamma(\omega)\ll|t|^{-1}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}.$$

取$\eta=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\alpha}$，则

$$R\ll\int_{2}^{\infty}e^{(\operatorname{arc}x-\frac{\pi}{2})t}\cdot\frac{\ln qt}{t}dt\ll\ln^{3}\frac{1}{\eta}.$$

对于$\theta\in m$，

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\alpha}>\frac{1}{4\pi N\alpha},\quad R\ll(\ln N\alpha)^{3}.$$

因$\frac{L'}{L}(0,\chi)\ll q$及$x^{-1}\ll\alpha^{-1}$，所以

$$S(N,\alpha,\chi)\ll\alpha^{-1}+(\ln N\alpha)^{3}+\left|\sum_{\rho}x^{-\rho}\Gamma(\rho)\right|. \tag{4}$$

§ 5.

命$\nu_0=\frac{\ln\ln N}{\ln N}$.为了估计$\left|\sum_{\rho}x^{-\rho}\Gamma(\rho)\right|$,我们将临界带区域分成带$\sigma_0$：$0\leqslant\sigma\leqslant\frac{1}{2}+\nu_0=\beta_0$与诸带$\sigma_\beta$：$\beta\leqslant\sigma\leqslant\beta+\frac{1}{\ln N}$，$\beta\geqslant\frac{1}{2}+\nu_0$之和，命$\alpha>0$及$N_0\geqslant N\alpha$。习知〔5〕

$L(\omega,\chi)$在矩形 $0\leqslant\sigma\leqslant\beta,|t|\leqslant N_0$ 中的零点个数有寻常估计

$$Q_L(\beta,N_0)\ll N_0\ln(qN_0)$$

置 $\rho_k=\beta_k+it_k$，因 $|x|\sim 2\pi\alpha$ 及

$$|\Gamma(\beta+it)|<c_3 t^{\beta-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi t}{2}},\quad |t|\geqslant 1,$$

$$-\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1, \tag{5}$$

故得

$$\left|\sum_{\rho_k\in\sigma_{\beta_0}} x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k)\right|\ll\alpha^{-\beta_0}\sum_{\rho_k\in\sigma_{\beta_0}} e^{(\arctan\cdots-\frac{\pi}{2})|t_k|}$$

$$|t_k|^{\beta_k-\frac{1}{2}}\ll\alpha^{-\beta_0}\sum_{\rho_k\in\sigma_{\beta_0}} e^{-\frac{|t_k|}{4\pi N\alpha}}|t_k|^{\beta_0-\frac{1}{2}}$$

$$\ll\alpha^{-\beta_0}N\alpha\ln(N\alpha)(N\alpha)^{\nu_0}\ll\alpha^{\frac{1}{2}-\nu_0}N^{2\nu_0}N,$$

此处与≪有关的常数与 χ,N,α,ν 无关.

因$\alpha=\dfrac{1}{q\tau}$，所以

$$\alpha^{-\nu_0}\ll(\ln N)^{20,000\nu_0}\ll 1,\quad N^{2\nu_0}=(\ln N)^2=r^2,$$

从而

$$\alpha^{\frac{1}{2}-\nu_0}N^{2\nu_0}N\ll\frac{Nr^2}{(q\tau)^{1/2}}<\frac{N}{q^{1/2}\tau^{1/4}}. \tag{6}$$

§ 6

假定$\dfrac{1}{2}+\nu_0\leqslant\beta\leqslant 0.6$，即 $\nu_0\leqslant\nu\leqslant 0.1$. 则由基本引理

（不等式(1)）得

$$Q_L(\beta,N_0)<c_1q^{2\nu}N_0^{1-\frac{\nu}{1-\nu}}\ln^{10}N_0+c_2q^{30}.$$

注意 $N_0 \geqslant N\alpha > H_1 = \tau^{100} \geqslant q^{100}$。因此

$$\left|\sum_{\rho_k \in \sigma_\beta} x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k)\right| \ll \alpha^{-\frac{1}{2}-\nu} \sum_{\rho_k \in \sigma_\beta} e^{-\frac{|t_k|}{4\pi N\alpha}} |t_k|^{\nu}$$

$$\ll (N\alpha)^{1-\frac{\nu}{1-\nu}} q^{2\nu} (N\alpha)^{\nu} \alpha^{-\frac{1}{2}-\nu} \ln^{10} N$$

$$\ll (N\alpha)^{1-\nu^2} q^{2\nu} \alpha^{-\frac{1}{2}-\nu} r^{10} =$$

$$N^{1-\nu^2} \alpha^{\frac{1}{2}-\nu-\nu^2} r^{10} q^{2\nu} \leqslant \frac{N q^{2\nu} r^{10}}{(q\tau)^{\frac{1}{2}-\nu-\nu^2}}$$

$$\ll \frac{N}{q\tau^{1/4}}. \qquad (7)$$

§ 7

假定 $0.1 = \nu \leqslant 1/3$，则 $\frac{3}{2} - \frac{1}{1-\nu} \geqslant 0$，所以

$$\left|\sum_{\rho_k \in \sigma_\beta} x^{-\sigma_k}\Gamma(\rho_k)\right| \ll \alpha^{-\frac{1}{2}-\nu} (N\alpha)^{1-\frac{\nu}{1-\nu}}$$

$$(N\alpha)^{\nu} q^{2\nu} \ln^{10} N \ll N^{1-\nu^2} \alpha^{\frac{3}{2}-\frac{1}{1-\nu}} q^2 \ll N^{1-0.01} q^{2\nu}.$$

因 $q \leqslant \tau$，所以

$$\left|\sum_{\rho_k \in \sigma_\beta} x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k)\right| \ll \frac{N}{q^{1\cdot 2} N^{0.005}}. \qquad (8)$$

假定 $\frac{1}{3} \leqslant \nu \leqslant 0.4$。则 $\frac{3}{2} - \frac{1}{1-\nu} < 0$，而最大估计是由在范围 $\alpha \geqslant H_1/N$ 中取极小而求得的，即(8) 的右端

$$\ll N^{1-\frac{\nu^2}{1-\nu}} r^{10} q^{2\nu} \left(\frac{N}{H_1}\right)^{\frac{1}{1-\nu}-\frac{3}{2}} \ll \frac{N^{\frac{1}{2}+\nu} q^{2\nu} 1_{\nu}^{10}}{H_1^{\frac{1}{1-\nu}-\frac{3}{2}}}$$

$$<N^{0.9}qr^{10}<\frac{N}{q^{1/2}N^{0.05}} \tag{9}$$

最后，对于 $0.4\leqslant\nu\leqslant 1/2$，则上述和满足

$$a^{-\frac{1}{2}-\nu}(N\alpha)^{1-\frac{\nu}{1-\nu}}r^{10}q^{2\nu}(N\alpha)^{\nu}<N^{1-\frac{\nu^2}{1-\nu}}$$

$$r^{10}q^{2\nu}\left(\frac{N}{H_1}\right)^{\frac{1}{1-\nu}-\frac{3}{2}}\ll\frac{N^{\frac{1}{2}+}q^{2\nu}r^{10}}{H_1^{5/3-3/2}}$$

$$\ll\frac{N}{qH_1^{0.1}}. \tag{10}$$

§ 8

对于$\theta=\frac{a}{q}+\alpha$（$\theta\in m$），由(4)～(10)可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\Lambda(n)e^{-\frac{n}{N}}e^{-2\pi ina}\ll r|\alpha|^{-1}+(\ln N\alpha)^3$$

$$+\frac{N}{q^{1/2}\tau^{1/4}}+\frac{N}{q^{1/2}N^{0.005}}+\frac{N}{q^{1/2}N^{0.05}}$$

$$+\frac{N}{qH_1^{0.1}}\Big);\ |\alpha|^{-1}\ll\frac{N}{qH_1^{1/2}}.$$

因此有一个小正数 $c_5>0$ 使

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\Lambda(n)e^{-\frac{n}{N}}e^{-2\pi in\alpha}\ll\frac{N}{q^{\frac{1}{2}+c_5}\tau^{0.1}} \tag{11}$$

从而当$\theta=\frac{a}{q}+\alpha$（$\theta\in m$）时有

$$S(N,\ \theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)e^{-\frac{n}{N}}e^{-2\pi in\theta}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\Lambda(n) e^{-\frac{n}{N}} e^{2\pi i(\frac{a}{q}+\alpha)n} = \sum_{\substack{(l,q)=1 \\ l (\bmod q)}} e^{-2\pi i \frac{a}{q}l}$$

$$\sum_{n \equiv l (\bmod q)} \Lambda(n) e^{-\frac{n}{N}} e^{-2\pi i n\alpha} + O(q^{\varepsilon})$$

$$= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \left(\sum_{l} \overline{\chi}(l) e^{-2\pi i \frac{al}{q}} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) e^{-\frac{n}{N}} e^{-2\pi i n\alpha} + O(q^{\varepsilon}).$$

因

$$\sum_{l} \overline{\chi}(l) e^{-2\pi i a l/q} \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

故由(11)可知

$$S(N,\theta) \ll \frac{q^{\frac{1}{2}} \varphi(q)}{\varphi(q)} \cdot \frac{q^{\varepsilon} N}{q^{\frac{1}{2}+C_6} \tau^{0\cdot 1}}$$

$$\ll \frac{N}{\tau^{0\cdot 1}} < \frac{N}{(\ln N)^{1\cdot 000}}. \qquad (12)$$

这对于解决哥德巴赫问题已经充足了.

参 考 文 献

〔1〕 Ju.V.LinniK,Dokl.Akad.Nauk SSSR,48,1945,3—7

〔2〕 E.Landau,Vorlesungen Über Zahlentheorie, Bd.II, 1927.

〔3〕 Ju.V.Linnik,Nzv.Akad. Nauk SSSR,Ser. Mat; 10, 1946,35—46.

〔4〕 C.L.Siegel,Acta Arith;1,1935,83—86.

〔5〕 A.Page,Proc.London Math.Soc;39,1935,116—141.

〔6〕 J.E.Littlewood, Proc.London. Math. Soc;27, 1928, 358—371

4. 三素数定理的一个新证明

潘 承 彪

（一）在 Gardy-Littlewood 圆法基础上，1937 年 И. M. Виноградов[1]首先利用他所提出的估计素数变数的三角和的方法证明了任一充分大的奇数都是三个素数之和，它通常称为 Goldbach-Виноградов 定理，简称三素数定理。此后，Ю. В. Линник[2]及 Н. Г. Чудаков[3]利用 L-函数零点密度估计给出了另外二个证明。最近，H. L. Montgomery[4] 及 M. N. Huxley[5]仍用 L-函数零点密度估计给出二个较为简化的证明，但他们利用了复杂的 L-函数的渐近函数方程和 L-函数四次幂的均值公式[1)]. 本文的目的是不用 Виноградов 方法及 L-函数的零点密度估计，而只用一些熟知的基本结果，对三素数定理给出一个新的简单的分析证明。

（二）本文中用 N 表示充分大的正整数，p, p_1, p_2, p_3 为素数以及 $e(x) = e^{2\pi i x}$. 设

$$S(x,\ N) = \sum_{p \le N} e(px), \tag{1}$$

那末 N 表为三个素数之和的形式的个数为

$$r(N) = \sum_{p_1+p_2+p_3=N} 1 = \int_0^1 S^3(x, N) e(-Nx)\,dx. \tag{2}$$

三素数定理就是要证明，当 N 为充分大的奇数时必有 $r(N) > 0$.

证明的关键是要得到下面的结果：设 c 为某一正整数，若

$$\log^c N < q \leqslant N\log^{-c}N,\ (q,h)=1, \tag{3}$$

则

$$S\left(\frac{h}{q},\ N\right) \ll N\log^{-3}N. \tag{4}$$

本文主要是证明下面的定理：

定理 设

$$T_1(x,N)=\sum_{n\leqslant N}\Lambda(n)\log\frac{N}{n}e(nx), \tag{5}$$

若 $(q,\ h)=1$，$1\leqslant q=N$，则

$$T_1\left(\frac{h}{q},\ N\right) \ll Nq^{-\frac{1}{2}}\log^{10}N + N^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{13}{2}}N. \tag{6}$$

由我们的定理就可推出（4），因而就证明了三素数定理。为此需要下面熟知的引理（见〔4〕定理6.2）。

引 1. 设 $\chi(n)$ 是模 q 的特征，则

$$\sum_{\chi}\left|\sum_{n=n_0+1}^{n_0+K}a_n\chi(n)\right|^2 \leqslant (q+K)\sum_{n=n_0+1}^{n_0+K}|a_n|^2, \tag{7}$$

其中 $\sum\limits_{\chi}$ 表示对全体模 q 的特征求和。

定理的证明：当 $(q,h)=1$ 时

$$T_1\left(\frac{h}{q},N\right)=\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}e\left(\frac{hl}{q}\right)\sum_{\substack{n\leqslant N\\n\equiv l\,(q)}}\Lambda(n)\log\frac{N}{n}$$

1）最近，Ramachandra K.〔7〕对L-函数四次幂的均值公式给出了一个简化证明。

$$+\sum_{\substack{n\leq N\\(n,q)=1}} \Lambda(n)\log\frac{N}{n}e\left(\frac{hl}{q}\right)=\frac{1}{\phi(q)}$$

$$\sum_{\chi}\tau(\overline{\chi})\chi(h)\psi_1(N,\chi)+O(\log^2 N\log q). \tag{8}$$

其中 $\phi(q)$ 为 Euler 函数，及

$$\tau(\chi)=\sum_{h=1}^{q}\chi(h)e\left(\frac{h}{q}\right), \tag{9}$$

$$\psi_1(N,\chi)=\sum_{n\leq N}\Lambda(n)\chi(n)\log\frac{N}{n}. \tag{10}$$

由于 $\tau(\chi_0)=\mu(q)$（χ_0为主特征），$|\tau(\chi)|\leqslant\sqrt{q}$ $(\chi\neq\chi_0)$ 及$\phi(q)\gg q\log^{-1}q$，故

$$T_1\left(\frac{h}{q},\ N\right)\ll\frac{\log q}{q}\psi_1(N,\ \chi_0)$$

$$+\frac{\log q}{\sqrt{q}}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\psi_1(N,\ \chi)|+\log^2 N\log q. \tag{11}$$

容易证明当$\alpha>1$时

$$\psi_1(N,\chi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}-\frac{L'}{L}(s,\ \chi)\frac{N^s}{s^2}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}-\frac{L'}{L}(s,\ \chi)\frac{N^s}{s^2}ds. \tag{12}$$

设 $A\leqslant N$ 为一待定常数，及

$$M(s,\ \chi)=\sum_{n\leq A}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s}. \tag{13}$$

其中 $\mu(n)$为 Mobius 函数，把$-\frac{L'}{L}(s,\ \chi)$分为[6]

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi)=-\frac{L'}{L}(s,\ \chi)(1-L(s,\ \chi)M(s,\chi))$$

$$-L'(s,\ \chi)M(s,\ \chi). \tag{14}$$

现取 $\alpha=1+\log^{-1}N$，$B=[6\log^2 N]$，熟知有

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi)=f_1(s,\ \chi)+f_2(s,\ \chi)+O(N^{-3}) \tag{15}$$

其中 $f_1(s,\chi)=\sum_{n\leq A}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}$，$f_2(s,\ \chi)$

$$=\sum_{A<n\leq 2^B A}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}. \tag{16}$$

由于在 $\mathrm{Re}s=1+\log^{-1}N$ 上，$L(s,\chi)\ll\log N$，$M(s,\chi)\ll\log N$ 故从(14)，(15)得，在 $\mathrm{Re}s=1+\log^{-1}N$ 上有

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi)=f_1(1-LM)+f_2(1-LM)-LM+O(N^{-2}). \tag{17}$$

由(12)，(17)得

$$\psi_1(N,\ \chi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\ )}[f_1(1-LM)+f_2(1-LM)-L'M]\frac{N^s}{s^2}ds+O(N^{-1}). \tag{18}$$

当 $\chi\neq\chi_0$ 时，其中第一，第三项积分可移至直线 $Res=\frac{1}{2}$ 上，

故得

$$\psi_1(N,\chi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{1}{2})}[f_1(1-LM)-L'M]\frac{N^s}{s^2}ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{(\ )}f_2(1-LM)\frac{N^s}{s^2}ds$$

$$+O(N^{-1})\ll\int_{(\frac{1}{2})}[|f_1|+|f_1LM|+|L'M|]\frac{N^{\frac{1}{2}}}{|s|^2}|ds|+\int_{(\ )}|f_2||1-LM|\frac{N}{|s|^2}|ds|$$

$$+O(N^{-1}). \tag{19}$$

利用 Hölder 不等式由(19)即得

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|\psi_1(N,\ \chi)|\ll N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\sup_{Re\,s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}|f_1|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+N^{\frac{1}{2}}\sup_{Re\,s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}|f_1|^4\right)^{1/4}$$

$$\cdot\sup_{Re\,s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}|M|^4\right)^{1/4}\int_{(\frac{1}{2})}\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}|L|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{|ds|}{|s|^2}+N^{\frac{1}{2}}\sup_{Re\,s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}|M|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\int_{(\frac{1}{2})}\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}|L'|^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{|ds|}{|s|^2}+N\sup_{Re\,s=\alpha}$$

$$\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}|f_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sup_{Re\,s=\alpha}\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}|1-LM|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+qN^{-1}. \tag{20}$$

由简单而熟知的结果（证明附于（四））

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|L\left(\frac{1}{2}+it_1x\right)\right|^2\ll q|s|\log^2 q|s|,$$

$$\left(s=\frac{1}{2}+it\right). \tag{21}$$

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|L'\left(\frac{1}{2}+it_1\chi\right)\right|^2\ll q|s|\log^4 q|s|,$$

$$\left(s=\frac{1}{2}+it\right). \tag{22}$$

可推得

$$\int_{(\frac{1}{2})}\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}|L^2|\right)^{\frac{1}{2}}\frac{|ds|}{|s|^2}\ll\sqrt{q}\log q, \tag{23}$$

$$\int_{(\frac{1}{2})}\Big(\sum_{\chi\neq\chi_0}|L'|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\frac{|ds|}{|s|^2}\ll\sqrt{q}\log^2 q. \qquad (24)$$

因而，为了估计(20)就只要利用引1来估计其中的各个和。下面都利用了条件

$$q\leqslant N,\ A\leqslant N.$$

(a) 由(16) 和引1得

$$\sum_{\chi}\left|f_1\left(\frac{1}{2}+it,\ \chi\right)\right|^2\leqslant(q+A)\log^3 N. \quad (25)$$

(b) 由(13)和引1得

$$\sum_{\chi}\left|M\left(\frac{1}{2}+it,\ \chi\right)\right|^2\leqslant(q+A)\log N. \qquad (26)$$

(c) 由(16) 得

$$f_1^2(s,\chi)=\sum_{n\leqslant A^2}\frac{a_n\chi(n)}{n^s},\ \ |a_n|\leqslant d(n)\log^2 n.$$

其中 $d(n)$为除数函数。故从引1得

$$\sum_{\chi}\left|f_1\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^4\ll(q+A^2)\log^8 N. \quad (27)$$

这里用到了$\sum_{n\leqslant x}\frac{d^2(n)}{n}\ll\lg^4 x$.在(d)和(f)中亦要用此结果。

(d)由(13)得

$$M^2(s,\ \chi)=\sum_{n\leqslant A^2}\frac{b_n\chi(n)}{n^s},\ \ |b_n|\leqslant d(n),$$

故从引1及$\sum_{n\leqslant x}\frac{d^2(n)}{n}\ll\log^4 x$ 得

$$\sum_{\chi}\left|M\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^4\ll(q+A^2)\log^4 N. \quad (28)$$

(e)由(16)得当 $Res=1+\lg^{-1}N$ 时

$$\sum_{\chi}|f_2(s,\chi)|^2=\sum_{\chi}\left|\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{2^jA<n\leqslant 2^{j+1}A}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}\right|^2$$

$$\leqslant B\sum_{j=0}^{B-1}\sum_{\chi}\left|\sum_{2^jA<n\leqslant 2^{j+1}A}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}\right|^2$$

$$\ll\log^2N\sum_{j=0}^{r-1}(q+2^jA)\sum_{2^jA<n\leqslant 2^{j+1}A}\frac{\Lambda^2(n)}{n^2}$$

$$\ll\left(\frac{q}{A}+\log^2N\right)\log^6N. \tag{29}$$

(f) 由于当 $Res=1+\log^{-1}N$ 时

$$1-LM=\sum_{A<n\leqslant 2^rA}\frac{c_n\chi(n)}{n^s}+O(N^{-1}),$$

$$|c_n|\leqslant d(n)$$

和(e)一样并利用 $\sum_{n\leqslant x}d^2(n)\ll x\log^3x$ 可证当 $Res=1+\log^{-1}N$ 时

$$\sum_{\chi}|1-LM|^2\ll\left(\frac{q}{A}+\log^2N\right)\log^8N \tag{30}$$

由(20)及(23)—(30)就得

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|\psi_1(N,\chi)|\ll N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}(q+A^2)^{\frac{1}{2}}\log^4N+N$$

$$\left(\frac{q}{A}+\log^2N\right)\log^7N. \tag{31}$$

现取 $A=N^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{2}{3}}N$，则由(11)，(31)及 $\psi_1(N,\chi_0)\ll N$ 即得(6)，定理证毕。

由我们的定理推得

引 2. 设 c 是一大于42的整数，则当

$$\log^c N < q \leqslant N\log^{-c} N,\quad (q,\ h)=1, \tag{32}$$

有

$$T_1\left(\frac{h}{q},\ N\right) \ll N\log^{-4} N. \tag{33}$$

（三）为了证明三素数定理，即证明(4) 需要下面的引理

引 3[1]. 设 c 是一大于 46 的整数，

$$T_0(x,N) = \sum_{n \leqslant N} \Lambda(n)e(nx) \tag{34}$$

则当 $\log^c N < q \leqslant N\log^{-c} N$，$(q,h)=1$ 时有

$$T_0\left(\frac{h}{q},\ N\right) \ll N\log^{-2} N \tag{35}$$

证：设 $\lambda = \log^{-2} N$，则有

$$T_1\left(\frac{h}{q}, N+\lambda N\right) - T_1\left(\frac{h}{q},\ N\right)$$

$$= \log(1+\lambda)\, T_0\left(\frac{h}{q},\ N\right)$$

$$+ \sum_{N<n\leqslant N+\lambda N} \Lambda(n)\log\frac{N+\lambda N}{n}\, e(nx), \tag{36}$$

故由引 2 和(36)得

$$\log(1+\lambda) T_0\left(\frac{h}{q},\ N\right) \ll N\log^{-4} N + \lambda N$$

---

1) 这引理是丁夏畦同志提出的，事实上，用下面的方法亦可得到关于 $T_c(x,N)$ 的一个一般估计式。

$$\cdot\log(1+\lambda). \tag{37}$$

由于当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时 $\log(1+x)>\frac{1}{2}x$ 故

$$T_0\left(\frac{h}{q},\ N\right)\ll\lambda^{-1}N\log^{-4}N+\lambda N\ll N\log^{-2}N. \tag{38}$$

证毕．

利用分部求和不难从引 3 推得，当

$$\log^c N<q\leqslant N\log^{-c}N,\ (q,\ h)=1,\ c\geqslant 42 \tag{39}$$

时有

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant N}\frac{\Lambda(n)}{\log n}e\left(\frac{nh}{q}\right)\ll N\log^{-3}N. \tag{40}$$

而这就等价于(4)．因而也就证明了三素数定理．

（四）(21)，(22) 的证明．先证明 (21)．设 $\chi\neq\chi_0$，$H=[q|s|]$，及 $F(x)=\sum_{H<n\leqslant x}\chi(n)$．由 Polya 定理知

$$F(x)\ll\sqrt{q}\log q.$$

故

$$\sum_{n=H+1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}}=\int_H^{\infty}\frac{dF(x)}{x^{\frac{1}{2}+it}}=\int_H^{\infty}\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

$$\frac{F(x)}{x^{3/2+it}}dx\ll|s|\sqrt{q}\log q\int_H^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$$

$$\ll\sqrt{|s|}\cdot\log q. \tag{41}$$

由此及引 1 得

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2 \ll \sum_{\chi\neq\chi_0}\left[\left|\sum_{n=1}^{H}\frac{\chi(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}}\right|^2\right.$$

$$\left.+|s|\log^2 q\right] \ll (q+H)\log H+q|s|\log^2 q$$

$$\ll q|s|\log^2 q|s| . \qquad (42)$$

这就证明了(21)．(22)可完全同样地加以证明．

参 考 文 献

〔1〕Виноградов И.М., Представление Нечётного числа суммой трёх Простых чисел, ДАН СССР, 15(1937) 291—294

〔2〕Линник Ю.В., О возможности единого метода В Некоторых Вопросах"аддитивной"И"Дистрибутивной"Теории Простых чисел, ДАН СССР, 49 (1945), 3—7.

〔3〕Чудаков Н.Г. (Tchudakoff N.), On Goldbach—Vinogradov,s thcorem, Ann. of Math. (2) 48 (1947), 515—545.

〔4〕Montgomery H.L., Topics in Multiplicative Number Thcory, Lecture Notes in Math. 227, 1971.

〔5〕Huxley M.N., The Distribution of Prime Numbers, Oxford Mathematical Monographs, 1972.

〔6〕潘承洞, 丁夏畦, 一个均值定理, 数学学报 18:4 (1975), 251—262.

〔7〕Ramachandra K. A Simple Proof of the mean fourth Pouser estimate for $\zeta(\frac{1}{2}+ti)$ and $L(\frac{1}{2}+ti,\chi)$, Ann. Sc. norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV Ser. 1(1974), 81—97.

5.素数论中的一个初等方法

沃　　恩

1.引　　论

命

$$T(Y, Q)=\sum_{q \leqslant Q} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \max_{X \leqslant Y}|\psi(X, \chi)|, \tag{1}$$

此处

$$\psi(X, \chi)=\sum_{n \leqslant X} \Lambda(n) \chi(n) \tag{2}$$

及 Σ^{*} 表示过模 q 的原特征求和，T 的估计是庞比尼—维诺格拉朵夫关于算术级数素数定理的要素．又命

$$H_{r}(Y, Q)=\sum_{q \leqslant Q} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \max_{X \leqslant Y}|M_{r}(X, \chi)|, \tag{3}$$

此处

$$M_{r}(X, \chi)=\sum_{\substack{n \leqslant Y \\ (n, r)=1}} \mu(n) \chi(n). \tag{4}$$

本文的目的在描述下面两个定理的证明，这一证明的想法已含于〔5〕，〔6〕之中．

定理 1．命 $Q \geqslant 1, Y \geqslant 2$，$L=\log YQ$．则

$$T(Y, Q) \ll\left(Y+Y^{\frac{5}{6}} Q+Y^{\frac{1}{2}} Q^{2}\right) L^{4}. \tag{5}$$

定理 2．命 $Q \geqslant 1$，$Y \geqslant 2$，$r \geqslant 1$，$L=\log YQ$．则

$$H_r(Y,Q) \ll (Y + d(r)Y^{\frac{5}{6}}Q + Y^{\frac{1}{2}}Q^2)\, L^4. \qquad (6)$$

由定理 1 及西革尔瓦尔菲茨定理易推出

定理 3（庞比尼-维诺格拉朵夫），命 $Q \geqslant 1$，$Y \geqslant 2$，$L = \log YQ$。则

$$\sum_{q \leqslant Q} \sup_{(a,q)=1,\, X \leqslant Y} \left| \psi(X,q,a) - \frac{X}{\phi(q)} \right|$$

$$\ll_A Y(\log Y)^{-A} + Y^{\frac{1}{2}} QL^4. \qquad (7)$$

类似地，由定理 2 可推出

定理 4，命 $Q \geqslant 1$，$Y \geqslant 2$，$L = \log YQ$。则

$$\sum_{q \leqslant Q} \sup_{X \leqslant Y} \left| \sum_{\substack{n \leqslant X \\ n \equiv 1 \pmod{q}}} \mu(n) \right| \ll_A Y(\log Y)^{-A} + Y^{\frac{1}{2}} QL^4. \qquad (8)$$

2. 定理 1 与 3 的证明

引 1. 假定 $a_m (m = 1, \cdots, M)$ 与 $b_n (n = 1, \cdots, N)$ 为复数，则

$$\sum_{q \leqslant Q} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \left| \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_m b_n \chi(mn) \right|$$

$$\ll \left((M + Q^2)(N + Q^2) \sum_m |a_m|^2 \sum_n |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

这是大筛法不等式与柯西不等式的直接推论（例如，见茄勒革尔〔1〕，或〔2〕，(1.4)）.

引 2. 在引 1 的前提下有

$$\sum_{q<Q}\frac{q}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\sup_{X\leqslant Y}\left|\sum_{\substack{m=1\\ mn\leqslant X}}^{M}\sum_{n=1}^{N}a_m b_n\chi(mn)\right|$$

$$\ll\left((M+Q^2)(N+Q^2)\sum_m|a_m|^2\sum_n|b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\log YMN. \tag{9}$$

证：命

$$C=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha$$

及$\gamma>0$，当$o\leqslant\beta<\gamma$时，定义$\delta(\beta)=1$，而当$\beta>\gamma$时，定义$\delta(\beta)=0$，则$C>0$，且易见当$A\geqslant 1$，$\beta\geqslant 0$，$\beta\neq\gamma$时有

$$\delta(\beta)=\int_{-A}^{A}e_{i\beta\alpha}\frac{\sin\gamma\alpha}{C\alpha}d\alpha+O(A^{-1}|\gamma-\beta|^{-1}).$$

命 $\gamma=\log\left([X]+\frac{1}{2}\right)$，$\beta=\log mn$，则

$$\sum_{\substack{m\\ mn\leqslant X}}\sum_{n}a_m b_n\chi(mn)=\int_{-A}^{A}\sum_m\sum_n a_m m^{i\alpha}b_n n^{i\alpha}\chi(mn)$$

$$\frac{\sin\gamma\alpha}{C\alpha}d\alpha+O\left(XA^{-1}\sum_m\sum_n|a_m b_n|\right).$$

在引1中取$A=YMN$，则得所需之结论。

若$Q^2>Y$，则在引2中取$M=1$，$a_1=1$，$b_n=\Lambda(n)$即得定理2。因此可以假定$Q^2\leqslant Y$。

命

$$u=\min(Q^2,\ Y^{\frac{1}{3}},\ YQ^{-2}). \tag{10}$$

如同$Q^2>Y$时一样应用引2，则得

$$\sum_{q\leq Q}\frac{q}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\sup_{X\leq u^2}|\psi(X,\chi)|\ll(u^2Q+uQ^2)L^2. \tag{11}$$

考虑恒等式

$$\sum_{u<n\leq X}\Lambda(n)f(n)=S_1-S_2-S_3, \tag{12}$$

此处

$$S_1=\sum_{m\leq u}\sum_{n\leq X/m}\mu(m)(\log n)f(mn), \tag{13}$$

$$S_2=\sum_{m\leq u^2}\sum_{n\leq X/m}c_m f(mn), \quad c_m=\sum_{\substack{a\leq u,\ b\leq u\\ ab=m}}\mu(a)\Lambda(b), \tag{14}$$

$$S_3=\sum_{\substack{m<u\\ mn\leq X}}\sum_{n>u}\tau_m\Lambda(n)f(mn), \quad \tau_m=\sum_{\substack{d\mid m\\ d\leq u}}\mu(d), \tag{15}$$

这可以由比较下面狄里希勒级数的恒等式的系数而求得

$$\begin{aligned}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)-F(s)\right)&=G(s)(-\zeta'(s))\\ &-F(s)G(s)\zeta(s)-(\zeta(s)G(s)-1)\\ &\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)-F(s)\right),\end{aligned} \tag{16}$$

此处

$$F(s)=\sum_{n\leq u}\Lambda(n)n^{-s}, \quad G(s)=\sum_{n<u}\mu(n)n^{-s}. \tag{17}$$

在(12)中记 $f(n)=\chi(n)$，则可见只要证明当 $j=1,2,3$ 时，和

$$T_j=\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\sup_{u^2\leqslant X\leqslant Y}|S_j|$$

适合(5) 即可，其中 T 需换成 T_j。注意在 $\sum\limits_{n<X}\Lambda(n)\chi(n)$ 中 $n\leqslant u$ 之诸项可由（11）估计。

由（15）可知

$$T_3\leqslant\sum_{M\in\mathcal{M}}T_3(M),$$

此处 $\mathcal{M}=\{2^k u:\ k=0,1,\cdots;\ 2^k u^2\leqslant Y\}$ 及

$$T_3(M)=\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\sup_{u^2\leqslant X\leqslant Y}|S_3(M)|,$$

其中

$$S_3(M)=\sum_{M<m\leqslant 2M}\sum_{u<n\leqslant X/m}\tau_m\Lambda(n)\chi(mn).$$

由引 2 得

$$T_3(M)\ll\Big((M+Q^2)(YM^{-1}+Q^2)\sum_{m\leqslant 2M}d(m)^2\sum_{n\leqslant Y/M}\Lambda(n)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\log Y\ll(Y+Y^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}Q+YM^{-\frac{1}{2}}Q+Y^{\frac{1}{2}}Q^2)(\log Y)^3.$$

由此易得所需的结论。

记 $\log n=\int_1^n d\alpha/\alpha$，并交换求和与积分运算次序，则由（13）得

$$S_1=\int_1^X\sum_{m\leqslant\min(u,X/\alpha)}\mu(m)\chi(m)\sum_{\alpha\leqslant n\leqslant X/m}\chi(n)\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

运用坡利亚（Pólya）维诺格拉朵夫不等式（许尔（Schur）的证明是初等的）可知当$q>1$时有

$$T_1 \ll (Y+uQ^{\frac{5}{2}})(\log Y)^2.$$

与（10）相结合仍可得相宜的估计，

综合上述方法可得T_2的估计．将和S_2分割成两部分

$$S_2 = S'_2 + S''_2,$$

此处S'_2含有$m\leqslant u$诸项而S''_2则含有$u<m\leqslant u^2$诸项，如S_1一样，可以处理S'_2，而S''_2可以如S_3来处理，这样即可得T_2的一个适当上界并完成定理1的证明．

如同定理1推出文〔4〕的系1.1.1一样，可以由定理1推出定理3．

3.定理2与4的证明

定理2的证明类似于定理1的证明，但需换一个恒等式

$$\sum_{n\leqslant X}\mu(n)f(n) = 2S_1 - S_2 - S_3, \tag{18}$$

此处

$$S_1 = \sum_{n\leqslant u}\mu(n)f(n), \tag{19}$$

$$S_2 = \sum_{m\leqslant u^2}\sum_{l\leqslant X/m} c_m f(mn),$$

$$c_m = \sum_{\substack{a\leqslant u,\ b\leqslant u\\ ab=n}}\mu(a)\mu(b), \tag{20}$$

$$S_3=\sum_{\substack{m>u\\ mn\leqslant X}}\sum_{n>u}\tau_m\mu(n)f(mn),\tau_m=\sum_{\substack{d\mid m\\ d\leqslant u}}\mu(d). \quad (21)$$

这是下面恒等式的直接推论：

$$\frac{1}{\zeta(s)}=2G(s)-G(s)^2\zeta(s)-(\zeta(s)G(s)-1)$$

$$\left(\frac{1}{\zeta(s)}-G(s)\right), \quad (22)$$

其中 $G(s)$满足(17)．

定理 2 证明中的情况 $Q^2>Y$ 可以如定理 1 证明中所用的方法来处理，命 u 适合（10），则如前一样，（11）中将 $\psi(X,\chi)$换成 $M_r(X,\chi)$仍成立，在（18）中，当$(n, r)=1$时命 $f(n)=\chi(n)$，当$(n,r)>1$时，命 $f(n)=0$．则估计

$$T_j=\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\sup_{u^2\leqslant X\leqslant Y}|S|, \quad (j=1,2,3).$$

即是．

类似于（11），可以估出 T_1．用定理 2 中对应和的估计方法可以估计 T_3．类似地，用将 S_2 按 $m\leqslant u$ 及 $m>u$ 划分为 S'_2 与S''_2 的方法可以估计 T_2，所以 $T_2\leqslant T'_2+T''_2$，此处 T'_2 与 T''_2 对应于 T_2 中将 S_2 分别换成 S'_2 与 S''_2，T''_2 可以类似于 T_3 来处理，剩下需处理者为 T'_2．

当 χ 为模 $q>1$ 的非主特征时，由坡利亚——维诺格拉朵夫不等式得

$$\sum_{\substack{n\leqslant Z\\ (n,r)=1}}\chi(n)=\sum_{d\mid r}\mu(d)\chi(d)\sum_{m\leqslant Z/d}\chi(m)$$

$$\ll d(r)q^{\frac{1}{2}}\log q.$$

所以

$$T'_2 \ll (Y + d(r)u(Q^{\frac{5}{2}})L^2.$$

由（10）可知 $u(Q^{5/2} \leqslant Y^{5/6}Q$。由此可得定理 2。

定理 4 的证明较之定理 3 的证明复杂些，其中的主要困难为原特征的归化。

注意

$$\sup_a \sup_{X \leqslant Y} \left| \sum_{\substack{n \leqslant X \\ n \equiv a \pmod q}} \mu(n) \right|$$

$$\leqslant \sum_{r \mid q} \sup_{\substack{b, \\ (b, q/r)=1}} \sup_{X \leqslant Y/r} \left| \sum_{\substack{m \leqslant X \\ m \equiv b \pmod{q/r} \\ (m, r)=1}} \mu(m) \right|.$$

所以

$$\sum_{q \leqslant Q} \sup_a \sup_{X \leqslant Y} \left| \sum_{\substack{n \leqslant X \\ n \equiv a \pmod q}} \mu(n) \right| \leqslant \sum_{r \leqslant Q} F_r(Y/r, Q/r), \tag{23}$$

此处

$$F_r(Y, Q) = \sum_{q \leqslant Q} \sup_{\substack{a \\ (a, q)=1}} \sup_{X \leqslant Y} \left| \sum_{\substack{n \leqslant X \\ n \equiv a \pmod q \\ (n, r)=1}} \mu(n) \right|.$$

当 $(a, q) = 1$时

$$\sum_{\substack{n \leqslant X \\ n \equiv a \pmod q \\ (n, r)=1}} \mu(n) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(a) \sum_{\substack{n \leqslant X \\ (n, r)=1}} \chi(n)\mu(n).$$

所以

$$\left|\sum_{\substack{n\leq X\\ n\equiv a\pmod q\\ (n,r)=1}}\mu(n)\right|\leqslant\frac{1}{\phi(q)}\sum_{d\mid q}\sum_{\chi\bmod d}{}^{*}$$

$$\left|\sum_{\substack{n\leq X\\ (n,rq/d)=1}}\chi(n)\mu(n)\right|.$$

这儿用到

$$F_r(Y,Q)\leqslant\sum_{k\leq Q}\frac{1}{\phi(k)}G_{rk}(Y,Q/k),\qquad (24)$$

其中

$$G_r(Y,Q)=\sum_{q\leq Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\sup_{X\leq Y}\left|\sum_{\substack{n\leq X\\ (n,r)=1}}\right.$$

$$\left.\chi(n)\mu(n)\right|.\qquad (25)$$

命 $R=Q$。则由（3），（4）与分别积分可知

$$G_r(Y,Q)-G_r(Y,R)\leqslant Q^{-1}H_r(YQ)$$
$$+\int_R^Q\alpha^{-2}H_r(Y,\alpha)d\alpha.$$

所以由定理 2 得

$$G_r(Y,Q)-G_r(Y,R)\ll(YR^{-1}+Y^{\frac{1}{2}}Q)L^4$$
$$+d(r)Y^{\frac{5}{6}}L^5.\qquad (26)$$

假定 $q\leqslant(\log Z)^4$ 及 χ 为模 q 的一个特征，则由狄里希勒 L 函数理论的标准应用可知

$$\sum_{\substack{n\leq Z\\ (n,r)=1}}\chi(n)\mu(n)\ll_A d(r)Z\exp(-c(\log Z)^{\frac{1}{2}}),$$

此处 c 为一个正常数，因此由（25）可知

$$G_r(Y,(\log Y)^B) \ll_B d(r) Y \exp\left(-\frac{1}{2}c(\log Y)^{\frac{1}{2}}\right).$$

这与（26）联合并适当地选取 B 即得

$$G_r(Y,Q) \ll_A (YL^{-A-4} + Y^{\frac{1}{2}}QL^4)d(r).$$

所以由（24）得

$$F_r(Y,Q) \ll_A (YL^{-A-2} + Y^{\frac{1}{2}}QL^4)d(r).$$

因此当 $Q \leqslant Y^{1/2}$ 时，由（23）得

$$\sum_{q \leqslant Q} \sup_{\substack{a, X \\ X \leqslant Y}} \left| \sum_{\substack{n \leqslant X \\ n \equiv a \pmod q}} \mu(n) \right| \ll_A YL^{-A} + Y^{\frac{1}{2}}QL^4.$$

注意：当 $Q > N^{1/2}$ 时，定理的结论是显然的，定理 4 证完。

参 考 文 献

〔1〕Gallagher, P. X.

The large sieve. Mathematika 14(1967), 14—20.

〔2〕Montgomery, H. L. and Vaughan, R. C.

The large sieve. Mathematika 20(1973), 119—134.

〔3〕Schur, I.

Einige Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit des Herr G. Polya: Über die Verteilung der Quadratischen Reste und Nichtreste, Göttinger Nachrichten 1918, 30—36.

〔4〕Vaughan, R. C.

Mean value theorems in Prime number theory. J. London Math. Soc. (2) 10(1975), 153—162.

〔5〕Vaughan, R. C.

Sommes trigonometriques sur les nombres Premiers. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Serie A, 285(1977), 981—983.

〔6〕 Vaughan, R. C.
On the distribution of aP modulo1. Mathematika 24 (1977), 135—141.

潘承彪注：由（12），我们可以给出$S(\alpha)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)e(n\alpha)$的估计，即当$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|<q^{-2}$，$(a,q)=1$。时有

$$S(\alpha)\ll(xq^{-\frac{1}{2}}+x^{4/5}+x^{1/2}q^{1/2})\log^{7/2}x.$$

不失一般性，我们可以假定$q\leqslant x$。因

$$\sum_{m\leqslant y}\max_{\omega}\left|\sum_{\omega\leqslant n\leqslant x/m}e(mn\alpha)\right|\ll\sum_{m\leqslant y}\min\left(\frac{x}{m},\frac{1}{\|m\alpha\|}\right)$$
$$\ll(xq^{-1}+yrq)\log qy,$$

此处$\|\xi\|$表示ξ至最近整数的距离，取$f(n)=e(nx)$。则由（13），（14）与（15）得

$$S_1\ll\log x\sum_{m\leqslant u}\max_{\omega}\left|\sum_{\omega\leqslant n\leqslant x/m}e(mn\alpha)\right|\ll(xq^{-1}+u$$
$$+q)\log^2 x,$$

$$S_2\ll\log x\sum_{m\leqslant u^2}\left|\sum_{n\leqslant x/m}e(mn\alpha)\right|\ll(xq^{-1}+u^2$$
$$+q)\log^2 x,$$

与

$$S_3\ll\log x\max_{u<M\leqslant x/u}\left|\sum_{M<m\leqslant 2M}\tau_m\sum_{u<n\leqslant x/m}\Lambda(n)n(mn\alpha)\right|$$

$$\ll \log^{\frac{5}{2}} x \max_{u < M < x/u} M^{1/2} \Big(\sum_{M < m \le 2M} \Big| \sum_{u < n \le x/m} \Lambda(n) e(mn\alpha) \Big|^2 \Big)^{1/2}$$

$$\ll x^{1/2} \log^3 x \max_{u < M < x/u} \max_{u < n_1 \le x/M} \Big(\sum_{u < n_2 \le x/M} \Big| \sum_{\substack{M < m \le 2M \\ m \le x/n_1 \\ m \le x/n_2}} e((n_1 - n_2) m\alpha) \Big| \Big)^{1/2}$$

$$\ll x^{1/2} \log^3 x \max_{u < M < x/u} \max_{u < n_1 \le x/M} \Big(\sum_{u < n_2 \le x/M} \min \Big(M, \frac{1}{||(n_1 - n_2)\alpha||}\Big) \Big)^{1/2}$$

$$\ll x^{1/2} \log^3 x \max_{u < M < x/u} \Big(M + \sum_{1 \le m \le x/M} \min \Big(\frac{x}{m}, \frac{1}{||m\alpha||}\Big) \Big)^{1/2}$$

$$\ll (xq^{-\frac{1}{2}} + xu^{-\frac{1}{2}} + x^{1/2} q^{1/2}) \log^{7/2} x.$$

取 $u = x^{2/5}$，即明所欲证。

二、表偶数为两个殆素数之和（初等方法）

6. 埃拉朵斯染尼氏筛法与哥德巴赫定理

布　　朗

§ 1

熟知哥德巴赫定理是说每个偶数可以分成两个素数之和，在 1742 年的一封信中，欧拉写道："尽管我不能证明它，但我相信这是一条完全对的定理."这条定理至今未被证明，下面的定理也是一样的：孪生素数[1]列有无穷多，1912 年在剑桥召开的国际数学会议上，兰岛在其演讲中认为这些问题是"近代科学中不可解决的问题"．

无论如何，今天处理这些问题已经有了起始点，即可以用一个类似于埃拉朵斯染尼氏筛法来处理哥德巴赫问题及孪

1）这是说一对素数，其相差为 2，见史泰克尔的文章(Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie Abt, A, Jahrg; 1916.10, Abh,)

生素数问题。第一个注意到这件事的是麦尔林[1]。

这个方法包含一个两重运用埃拉朵斯染尼氏筛法，例如给出偶数 26 的分析，我们写出下列两个数列：

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

26 25 24 23 22 21 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

不超过$\sqrt{26}$ 的素数为 2，3 与 5。在我们的二数列中，我们去掉形如 2λ，3λ 与 5λ 的数，第一行中一个数与第二行中对应的数之和为26。如果这两个数均未被划掉，即它们都是素数，这就得到 26 的一个哥德巴赫分拆，我们仅可选取 26 与 0 作为我们划数的起始点，用这个方法我们就得到将偶数 x 分析为两个介于$\sqrt{x}$ 与 $x-\sqrt{x}$ 的素数之和的全部分拆，选择 0 与 2 作为我们划数的起始点，则我们可以决定孪生素数，我们不知道用这个方法是否能导至这些定理的证明；但我们可以看到这个方法可以得出非常深刻的结果。

§ 2

我们首先研究埃拉朵斯染尼氏方法，将这个方法用下面

---

1) Bulletin des Sciences mathematiques T.39, I partie, 1915. See also Viggo Brun in " Archiv for Mathematik og Naturvidenskab " 1915, B.34, nr.8: "Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare".

的形式给出。

假定给出数列：

$$\begin{array}{ccccccccccc} \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{10\cdots x} \\ 0 & & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & 10\cdots \\ 0 & & & 3 & & & 6 & & & 9 & \cdots \\ & & & & & \cdots\cdots & & & & & \\ 0 & & & p_n & & & 2p_n & & & 3p_n & \cdots\lambda p_n \end{array}$$

此处 x 为整数及 p_n 为满足

$$p_n \leqslant \sqrt{x} < p_{n+1}$$

的第 n 个素数，而 λ 为满足

$$\lambda p_n \leqslant x < (\lambda+1) p_n$$

的整数。

第一个数列的项，不同于其他所有数列的项者，为1及介于 $\sqrt{x}$ 与 x 间的所有素数。

这些项就是未被埃拉朵斯染尼氏筛法划去的数，一般言之，研究下面的算术数列：

$$\begin{array}{ccc} \underline{\triangle} & \underline{\triangle+D} & \underline{\triangle+2D\cdots} \\ a_1 & a_1+p_1 & a_1+2p_1\cdots \\ & \cdots\cdots & \\ a_r & a_r+p_r & a_r+2p_r\cdots \end{array}$$

这个数列由0延至 x，D 表示与诸素数 $p_1,\cdots,p_r$（相继或不相继）互素的一个整数。

$\triangle$ 与 $a_1,\cdots,a_n$ 为 满足下面条的整数

$$0 < \triangle \leqslant D, \quad 0 < a_i < p_i.$$

我们提出下面的问题：

第一行中不同于其他所有行的元素的个数有多少？

我们将这个数记为

$$N(\triangle,\ D,\ x,\ a_1,p_1,\cdots,\ a_r,\ p_r),$$

或简记为

$$N(D,\ x,\ p_1,\ \cdots,p_r).$$

我们得到基本公式：

$$\begin{aligned}&N(\triangle,\ D,\ x,\ a_1,\ p_1,\ \cdots,a_r,\ p_r)\\&=N(\triangle,\ D,\ x,\ a_1,\ p_1,\cdots,\ a_{r-1},\ p_{r-1})\\&-N(\triangle',\ Dp_r,\ x,\ a_1,\ p_1,\cdots,\ a_{r-1},\ p_{r-1}),\end{aligned}$$

此处

$$0<\triangle'\leqslant Dp_r,$$

或简记为

$$\begin{aligned}&N(D,\ x,\ p_1,\ \cdots,\ p_r)=N(D,\ x,\ p_1,\ \cdots,\ p_{r-1})\\&-N(Dp_r,\ x,\ p_1,\ \cdots,\ p_{r-1}).\qquad\qquad(1)\end{aligned}$$

这只要首先考虑我们的数列划去直到数列 $a_{r-1}+\lambda p_{r-1}$ 中的相同数，再加上 $a_r+\lambda p_r$ 中对应的数。假定 $N(\triangle,\ D,\ x,a_1,\ p_1,\cdots,\ a_{r-1},\ p_{r-1},)$ 已知，则 $N(\triangle,\ D,\ x,a_1,\ p_1,\cdots,\ a_r,\ p_r)$ 等于 $N(\triangle,\ D,\ x,a_1,p_1,\cdots,\ a_{r-1},\ p_{r-1})$ 减去最后数列中的数，它属于第一个数列而不属于中间数列的个数。

我们注意到这个数等于 $N(\triangle',\ Dp_r,\ x,a_1,\ p_1,\cdots,\ )$ $p_{r-1})$. 这是由于最后数列 $a_r+\lambda p_r$ 与另一个数列 $\triangle+\mu D$ 恒同的数为 0 与 x 间下面算术级数的所有数

$$\triangle',\ \triangle'+Dp_r,\ \triangle'+2Dp_r,\cdots,$$

此处

$$0<\triangle'\leqslant Dp_r,$$

其中$\triangle'$表示这个数列中的最小正数。

因p_r与D是互素，所以不定方程

$$a_n+\lambda p_r=\triangle+\mu D$$

或

$$p_r\lambda-D\mu=\triangle-a_r$$

恒有介，这些“解”可以写成

$$\lambda=\lambda_0+tD,\ \mu=\mu_0+tp_r,$$

其中λ_0,μ_0为一组介，而才过0 ± 1，$\pm2\cdots$，

第二个数列恒等于第一个数列者为

$a_r+\lambda p_r=a_r+\lambda_r p_r+tDp$，此处$t=0,\pm1,\pm2\cdots$

这些数为具有公差Dp_r的算术数列。

我们定义$N(\triangle,D,x)$，与简记为$N(D,x)$为数列

$\triangle\quad\triangle+D\quad\triangle+2D\cdots\triangle+\lambda D$,

中介于0与x间的所有项，此处

$$0<\triangle\leqslant D,\ \triangle+\lambda D\leqslant x<\triangle+(\lambda+1)D,$$

因此我们得

$$\lambda+1=N(D,x)=\frac{x}{D}+\theta,\ \text{此处}-1<\theta<1.$$

例：选取

$\triangle=2\quad D=7\quad x=60\quad a_1=2\quad p_1=2\quad a_2=1$

$p_2=3\quad a_3=4\quad p_3=5$

(A) 2 9 16 23 30 37 44 51 58

(B) 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30

32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60

(C) 1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31 34 37 40 43

46 49 52 55 58

(*D*) 4 9 14 19 24 29 34 39 44 49 54 59

(*A*)中的数不同于(*B*)与(*C*)中的数者为 9,23,51，再加上数列(*D*)，(*A*)与(*D*)中的数恒等者为 9 与44，具有公差 $7\cdot5=35$，故得

$$N(7,60,2,3,5)=N(7,60,2,3)=N(7,5,60,2,3)$$

或 $2=3-1$。

由公式(1)得

$$N(D,x,p_1\cdots,p_r)=N(D,x)-N(Dp_1,x)$$
$$-N(Dp_2,x,p,)-\cdots-N(Dp_r,x,p_1,\cdots,p_{r-1})$$

及 (2)

$$N(D,x,p,\cdots p_n)=N(D,x)-N(Dp,x)$$
$$-\cdots-N(Dp_r,x)+N(Dp_2p_1,x)$$
$$+N(Dp_3p_1,x)+N(Dp_3p_2,x,p_1)$$

$$+\cdots$$

138

$$+N(Dp_rp_1,x)+N(Dp_rp_2,x,\ p_1)+\cdots$$
$$+N(Dp_rp_{r-1},\ x,p_1,\cdots p_{r-2}). \quad (3)$$

我们可以将最后一个公式写成

$$N(D,x,p_1,\cdots p_r)=N(D,x)-\sum_{a\leqslant r}N(Dp_a,x)$$
$$+\sum_{a\ \ r}\ \sum_{b\leqslant a}N(Dp_ap_bx,p_1\cdots p_{o-1}). \quad (3)$$

当我们的问题需要确定 $N(D,xp_1\cdots rr)$ 的下界时，我们可以在公式(3)中去掉任意多个正项，我们有几种方法来选取这些项[1]。例如，去掉某一重线右端诸项，一般言之可得

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>N(D,x)-\sum_{a\leqslant r}N(Dp_a,x)$$
$$+\sum_{\omega}\sum_{1}N(Dp_b p_r,x,p_1,\cdots,p_{b-1}),(4)$$

此处我们对于 $p_a p_b$ 选的一个范围 ω，它属于下面范 围之中

$p_2 p_1$

$p_3 p_1 \quad p_3 p_2$

$\cdots$

$p_r p_1 \quad p_r p_2 \cdots p_r p_{r-1}$，

两次运用公式(4)，我们得新公式

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>N(D,x)-\sum_{a\leqslant r}N(Dp_a,x)$$
$$+\sum\sum_{\omega 1}\left(N(Dp_a p_b,x)-\sum_{c<b}N(Dp_a p_b p_c,x)\right)$$
$$+\sum\sum_{\omega 1'}\sum\sum_{\omega 2}N(Dp_a p_b p_c p_d,x,p_1,\cdots,p_{d-1}).$$

此处 $\omega'_1\leqslant\omega_1$ 及 ω_2 表示 $p_c p_d$ 的范围。

继续这一手续并用

$$N(d,x)=\frac{x}{d}+\theta,\qquad \text{此处}-1<\theta<1,$$

则最后得

$$\frac{D}{x}N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>1-\sum_{a\leqslant r}\frac{1}{p_a}$$
$$+\sum_{\omega}\sum_{\omega 1}\frac{1}{p_a r_b}\left(1-\sum_{c<b}\frac{1}{p_c}\right)$$

---

1) 见:" Nyt tidsskrift" 1918: Une formule-exacte pour la détermination du nombre des nombres premiers audessous de x,etc.by Viggo Brun.

$$+\sum_{\omega_1'}\sum\sum_{\omega_2}\sum\frac{1}{p_a p_b p_a p_d}\left(1-\sum_{e<d}\frac{1}{p_e}\right)$$

$$+\cdots-\frac{RD}{x}. \tag{5}$$

此处 R 表示项数及 $\omega_1' \leqslant \omega_1$ 等。

假定 $p_1=2, p_2=3, p_3=5$ 等，则可以将公式(5)写成

$$N(D,x,2,3,5\cdots p_r)>\frac{x}{D}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\cdots-\frac{1}{p_r}\right.$$

$$+\frac{1}{3.2}$$

$$+\frac{1}{5.2}+\frac{1}{5.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{7.2}+\frac{1}{7.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7.5}\left(\begin{matrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ +\frac{1}{3.2}\end{matrix}\right)$$

$$+\cdots$$

$$+\frac{1}{p_T.2}+\frac{1}{p_r\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{p_r\cdot 5}\left(\begin{matrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ +\frac{1}{3.2}\end{matrix}\right)$$

$$\left.+\frac{1}{P_r\cdot 7}\left\{\begin{matrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\\ +\frac{1}{3.2}\\ +\frac{1}{5.2}+\frac{1}{5.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\end{matrix}\right\}+\cdots\right\}-R,$$

此处我们可以去掉（包括跟随着括号中的项）任何带有正号的项。

R 表示所有项的个数。

如果我们去掉那些项，它乘以$\frac{x}{D}$之后小于所取的项数，则可以得到 N 的较好的下界。

例：取 $x=1,000, D=1$ 及 $p_2=31$，这是不超过$\sqrt{x}$的最大素数。则

$$
\begin{aligned}
N(1,10^3,2,3,\cdots,31)>10^3\Big[&1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{31}\\
&+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}+\frac{1}{5.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7.2}+\frac{1}{7.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
&+\frac{1}{7.5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\right)+\frac{1}{11.2}+\frac{1}{11.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
&+\frac{1}{11.5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\right)+\frac{1}{13.2}\\
&+\frac{1}{13.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{13.5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\right)\\
&+\frac{1}{17.2}+\frac{1}{17.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{19.2}+\frac{1}{19.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
&+\frac{1}{23.2}+\frac{1}{23.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
&+\frac{1}{29.2}+\frac{1}{29.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{31.2}\\
&+\frac{1}{31.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\Big]-52.
\end{aligned}
$$

因 $\frac{1}{17.5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\right)=0.0039$，它乘以 10^3 等于3.9小于4，所以它被去掉了，在项

$$\frac{1}{11.7}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}+\frac{1}{5.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right)$$

中，因 $\frac{10^3}{11\cdot7\cdot5\cdot3}\left(1-\frac{1}{2}\right)=0.4$ 小于2，所以去掉 $\frac{1}{5.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)$。又因 $10^3\cdot0.003=3$ 小于6，所以去掉 $\frac{1}{11.7}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}\right)(=0.003)$。

最后得

$$N(1,10^3,2,3,\cdots,31)>109-52=57.$$

我们可以用下法来表示这个结果：

当我们在1,000个数中去掉2,3,5,直至31的倍数时，至少还剩57个数。我们取0作为划数的起始点，并注意

$$N(1,10^3,2,3,\cdots,31)=\pi(10^3)-\pi(\sqrt{10^3})+1,$$

所以在 π 与1,000之间的素数个数多于56。

这里兀(x)表示不超过 x 的素数个数。

这里我们选择范围 ω 使之获得最适当的下界结果，用这个原则，可得如下结果：

$$N(1,10^3,2,3,\cdots,31)>109-52=57,$$

而 $\pi(10^3)-\pi(\sqrt{10^3})=158$

$$N(1,10^4,2,3,\cdots,97)>820-284=536,$$

而 $\pi(10^4)-\pi(\sqrt{10^4})=1,206,$

$$N(1,10^5,2,3,\cdots,313)>5{,}733-1{,}862=3{,}871,$$

而 $\pi(10^5)-\pi\sqrt{10^5})=9{,}528$

以下我们将用较简单的方法选取 ω。

为了阐述这些原则，我们首先给出三个例子。

例 1：

$$N(1,x,2,3,5,7)>x\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}+\frac{1}{5.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7.2}+\frac{1}{7.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7.5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\right)\right]-16=x\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)-2^4,$$

我们不去掉任意项。

例2：

$$N(1,x,2,3,5,7,11)>x\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}+\frac{1}{5.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7.2}+\frac{1}{7.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7.5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{11.2}+\frac{1}{11.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{11.5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{11.7}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]-26,$$

此处去掉的项数是不多的，上式也可以写成

$$N(1,x,2,3,5,7,11)>x\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\right.$$

$$\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)-\left(\frac{1}{7\cdot5\cdot3\cdot2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{11\cdot5\cdot3\cdot2}+\frac{1}{11\cdot7\cdot3\cdot2}+\frac{1}{11\cdot7\cdot5\cdot2}+\frac{1}{11\cdot7\cdot5\cdot3}\right)$$

$$\left.+\left(\frac{1}{11\cdot7\cdot5\cdot3\cdot2}\right)\right]-\left(1+5+\frac{5.4}{1.2}+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\right)$$

$$=x[0.2078-0.0121+0.0004]-26=0.1961x-26.$$

在此我们去掉所有形如$\frac{1}{p_a p_b p_c p_d}$与$\frac{1}{p_a p_b p_c p_d p_e}$的项.

例3：

$$N(1,x,2,3,5,7,11,13,17,19)>x\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right.$$

$$-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}+\frac{1}{5.3}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7.2}+\frac{1}{7.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7.5}\left(1-\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\right)+\frac{1}{11.2}+\frac{1}{11.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{11.5}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\right)+\frac{1}{11.7}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}\right)+\frac{1}{13.2}$$

$$\frac{1}{13.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{13.5}\left(\begin{array}{l}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\+\frac{1}{3.2}\end{array}\right)+\frac{1}{13.7}$$

$$\left(\begin{array}{l}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\\ \left.\begin{array}{l}+\frac{1}{3.2}\\+\frac{1}{5.2}\end{array}\right|\end{array}\right)+\frac{1}{17.2}+\frac{1}{17.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{17.5}$$

$$\left(\begin{array}{l}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\+\frac{1}{3.2}\end{array}\right)+\frac{1}{17.7}\left(\begin{array}{l}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\\ \left.\begin{array}{l}+\frac{1}{3.2}\\+\frac{1}{5.2}\end{array}\right|\end{array}\right)+\frac{1}{19.2}$$

$$+\frac{1}{19.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{19.5}\left(\begin{array}{l}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\+\frac{1}{3.2}\end{array}\right)+\frac{1}{19.7}$$

$$\left(\begin{array}{l}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\\ \left.\begin{array}{l}+\frac{1}{3.2}\\+\frac{1}{5.2}\end{array}\right|\end{array}\right)-72=0.163x-72.$$

在此我们去掉垂线右端的所有项。可以看出表达式具有形式

$$1-\sum\frac{1}{p_a}+\sum\sum\frac{1}{p_a p_b}-\sum\sum\sum\frac{1}{p_a p_q p_c}$$

$$+\sum\sum\sum\sum\frac{1}{p_a p_b p_c p_d},$$

此处 p_a, p_b, p_c与 p_d 过下面的数值

p_a　2 3 5 7 11 13 17 19

p_d　2 3 5 7

p_c　2 3 5 7

p_b　2

其中　$a>b>c>d$。

§3

我们首先研究例 2 的方法.

我们不应用一般的公式(5)，我们直接由(3′)推出

$$N(D,x,p,\cdots,p_r)=N(D,x)-\sum_{a\leqslant r}N(Dp_a,x)$$

$$+\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}N(Dp_a p_b,x,p_1,\cdots,p_{b-1}).$$

运用这个公式两次则得

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)=N(D,x)-\sum_{a\leqslant r}N(Dp_a,x)$$

$$+\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}N(Dp_a p_b,x)-\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\sum_{c<b}$$

$$N(Dp_a p_b p_c,x)+\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\sum_{c<b}\sum_{d<c}$$

$$N(Dp_a p_b p_c p_d,x,d_1,\cdots,p_{d-1})\tag{6}$$

最后一个和为正的(或0). 利用

$$N(d,x)=\frac{x}{d}+\theta, \qquad \text{此处} -1\leqslant\theta<1,$$

则得

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>\frac{x}{D}\left[1-\sum_{a\leqslant r}\frac{1}{p_a}+\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\frac{1}{p_ap_b}\right.$$

$$\left.-\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\sum_{c<b}\frac{1}{p_ap_bp_c}\right]-R, \tag{7}$$

或简记为

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>\frac{x}{D}[1-\Sigma_1+\Sigma_2-\Sigma_3]-R,$$

此处Σ_1等于下面三行中第一行诸项之和 (7′)

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_r}=\sigma$$

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_r}$$

$$\frac{1}{p_1}+\frac{p}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_r}$$

Σ_2 等于所有第一行的每个元素乘以第二行这个元素左边的各元素之和，而 Σ_3 可以类似地来定义。

以下我们将要说，我们用图形(A)式简言之，用图形

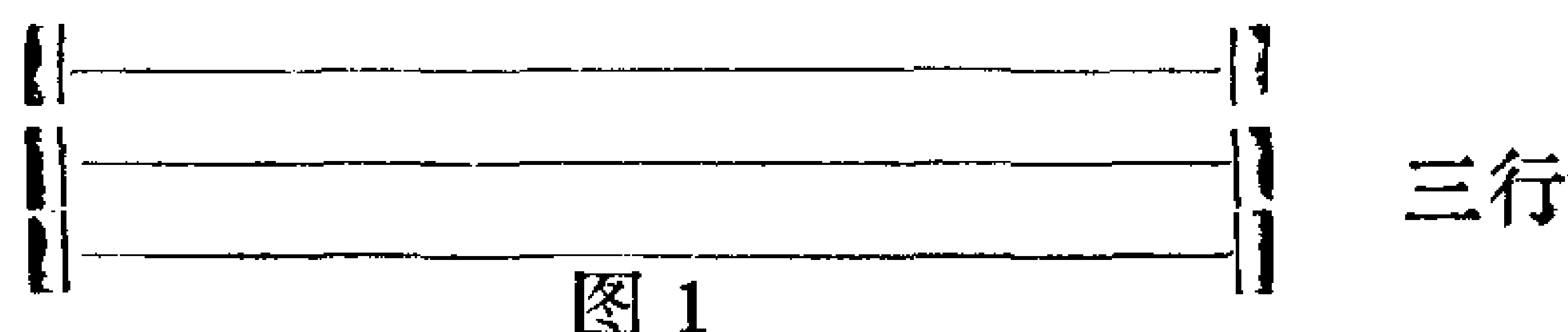


图 1

来计算

$1-\Sigma_1+\Sigma_2-\Sigma_3$。

我们来比较 Σ_2 与σ^2：

$$\sigma^2=\left(\frac{1}{p_1}\right)^2+\left(\frac{1}{p_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{p_r}\right)^2$$

$$+2\Sigma_2>2\Sigma_2 \text{ 或 } \sigma\Sigma_1>2\Sigma_2.$$

我们将要证明

$$\sigma\Sigma_2>3\Sigma_3 \text{或} \left(\sum_{c\leqslant r}\frac{1}{p_c}\right)\left(\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\frac{1}{p_a p_b}\right)$$

$$>3\left(\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\sum_{c<b}\frac{1}{p_a p_b p_c}\right)$$

任何项$\frac{1}{p_\alpha p_\beta p_\gamma}$，此处$\gamma<\beta<\alpha\leqslant r$，皆在$\Sigma_3$中出现一次，而在$\sigma\Sigma_2$中出现三次。

我们首先在$\sum_{c\leqslant r}\frac{1}{p_c}$中找出$\frac{1}{p_\alpha}$及在$\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\frac{1}{p_a p_b}$中找到$\frac{1}{p_\beta p_\gamma}$，然后在$\sum_{c\leqslant r}\frac{1}{p_c}$中找出$\frac{1}{p_\beta}$及在$\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\frac{1}{p_a p_b}$中找出$\frac{1}{p_\alpha p_\gamma}$。最后在$\sum_{c\leqslant r}\frac{1}{p_c}$中找出$\frac{1}{p_\gamma}$及在$\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\frac{1}{p_a p_b}$中找到$\frac{1}{p_\alpha p_\beta}$。

项$\frac{1}{p_\alpha p_\beta p_\gamma}$在$\sigma\Sigma_2$中出现三次，它还包有形如$\frac{1}{p_\alpha^2 p_\beta}$的项等，因此得$\sigma\Sigma_2>3\Sigma_3$。

用(6)来计算(6)中最后一个和，则我们可以推广(7)。继续这个步骤，则可得一个类似于(7)的公式，或简单些，

类似于(7′)的公式：

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>\frac{x}{D}[1-\Sigma_1+\Sigma_2-\cdots\cdots\Sigma_m]$$

$$-R, \tag{8}$$

此处 m 为适合 $m\leqslant r$ 的奇数，及此处表达式 $1-\Sigma+\Sigma_2-\cdots-\Sigma_m$ 可以用图形

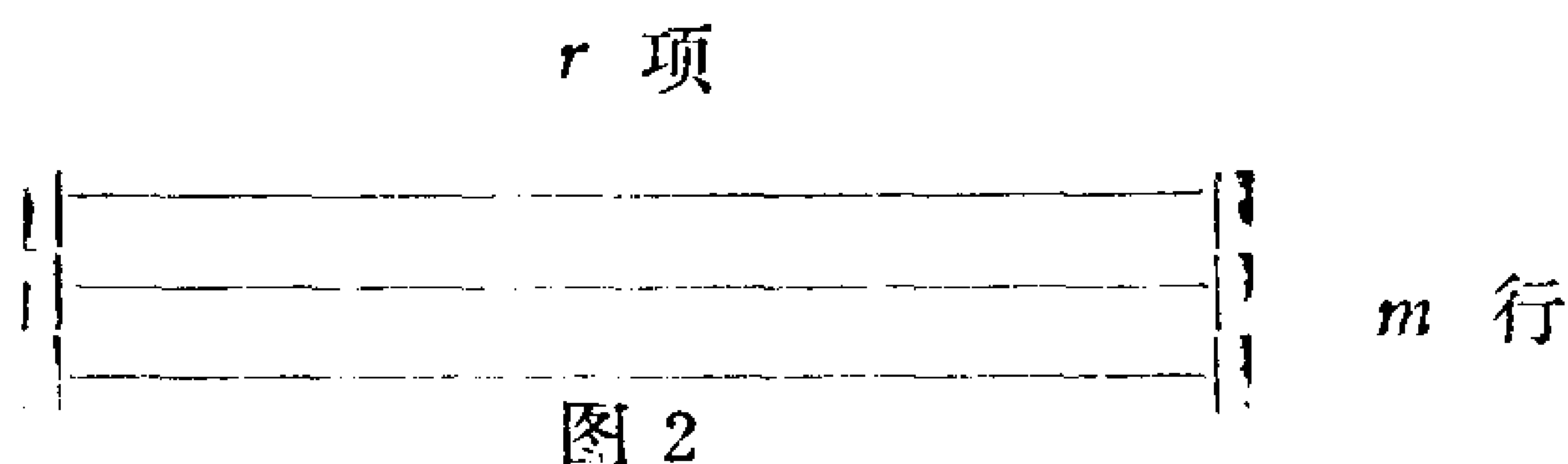


图 2

来计算，

对于特殊情况 $m=r$，我们可以计算表达式：

$$1-\Sigma_1+\Sigma_2-\cdots+(-1)^r\Sigma_r$$

$$=\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

$$=1-\sum_{a\leqslant r}\frac{1}{p_a}+\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\frac{1}{p_a p_b}-\cdots,$$

此处 r 是奇或偶，这种情况下，项数为 2^r，故得公式

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>\frac{x}{D}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots$$

$$\left(1-\frac{1}{p_r}\right)-2^r. \tag{9}$$

一般情况，我们将决定表达式

$$1-\Sigma_1+\Sigma_2-\cdots-\Sigma_m$$

的下界。

如前，我们可以证明

$$\sigma=\Sigma_1,\quad \sigma\Sigma_i>(i+1)\Sigma_{i+1}\quad (1\leqslant i\leqslant m-1).$$

因此$\sigma^m>m!\Sigma_m$。

因此

$$\Sigma_m<\frac{\sigma}{m}\Sigma_{m-1}. \tag{10}$$

及由史特林公式

$$m! = \left(\frac{m}{e}\right)^m(\sqrt{2\pi m}+\theta,\quad -1<\theta<1,$$

得

$$\Sigma_m<\frac{\sigma^m}{m!}<\left(\frac{e\sigma}{m}\right)^m. \tag{11}$$

现在用不同的方法将公式(8)记为

$$N(D,x,p,\cdots,p_r)>\frac{x}{D}[(1-\Sigma_1+\Sigma_2-\cdots+(-1)^r\Sigma_r)$$

$$-(\Sigma_{m+1}-\Sigma_{m+2}+\cdots+(-1)^r\Sigma_r)]-R.$$

我们知道右端第一个括孤可以表为乘积形式。当$m+2>\sigma$时，第二个括孤中各次的数值递减，故其绝对值不超过$\Sigma_{m+1}<\left(\frac{e\sigma}{m+1}\right)^{m+1}$.

所以

$$N(D,x,p_1,\cdots p_r)>\frac{x}{D}\left[\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{e\sigma}{m+1}\right)^{m+1}\right]-R.$$

不难定出 R 的值[1])

$R=1+\binom{r}{1}+\binom{r}{2}+\cdots+\binom{r}{m}<1+r+r^2+\cdots+r^m<r^{m+1}$,

所以当

$$m+2>\sigma=\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_r}$$

时有公式

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>\frac{x}{D}\left[\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)-\left(\frac{e\sigma}{m+1}\right)^{m+1}\right]-r^{m+1}. \tag{12}$$

这个公式比(9)有用,这是由于 r^{m+1} 的增长比 2^r 缓慢。但对我们的目的, R 的增长仍嫌太快。

§4

为此目的,我们将用另法选取 ω, 即如例 3 (见§2) 那样去掉重线右边各项。

首先我们在公式(3)中去掉一条垂线右边各项,则得下面公式

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>N(D,x)\sum_{-a\leqslant r}N(Dp_a,x)+\sum_{a\leqslant r}\sum_{\substack{0<a\\ b<t}}N(Dp_ap_b,x,p_1,\cdots p_{b-1}), \tag{13}$$

此处大为一个小于 r 的整数。

---

1)例如,见兰岛, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen,I.p.67.

上面公式的最后一项可以用同样方法来计算，故得

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>N(D,x)-\sum_{a\leqslant r}N(Dp_a,x)$$

$$+\sum_{a\leqslant r}\sum_{\substack{b<a\\ b<t}}N(Dp_a p_b,x)\qquad-\sum_{a\leqslant r}\sum_{\substack{b<a\\ b<t}}\sum_{\substack{c<b\\ c<t}}$$

$$N(Dp_a p_b p_c,x)+\sum_{a\leqslant r}\sum_{\substack{b<a\\ b<t}}\sum_{\substack{c<b\\ c<t}}\sum_{\substack{d<c\\ c<u}}N(Dp_a p_b$$

$$p_c p_d,x,p_1,\cdots,p_{d-1}),$$

此处 u 为一个小于 r 的整数。

继续这个步骤，并利用

$$N(d,x)=\frac{x}{d}+\theta,\qquad -1\leqslant\theta<1,$$

则最后得公式

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>\frac{x}{D}\Big[1-\sum_{a\leqslant r}\frac{1}{p_r}+\sum_{a\leqslant r}\sum_{\substack{b<a\\ b<t}}\frac{1}{p_a p_b}-$$

$$-\sum_{a\leqslant r}\sum_{\substack{b<a\\ b<t}}\sum_{\substack{c<b\\ c<t}}\frac{1}{p_a p_b p_c}+\sum_{a\leqslant r}\sum_{\substack{b<a\\ b<t}}\sum_{\substack{c<b\\ c<t}}\sum_{\substack{d<c\\ d<u}}$$

$$\frac{1}{p_a p_b p_c p_d}-\cdots\Big]-R,\tag{14}$$

或简记为

$$N(D,x,p_1,\cdots p_r)>\frac{x}{D}[1-S_1+S_2-\cdots-S_{2n-1}]$$

$$-R,\tag{14'}$$

其中表达式

$$E_n=1-S_1+S_2-\cdots-S_{2n-1}$$

用下面阶梯形的图形来计算。

$$\underbrace{\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{\omega-1}}}_{\sigma_n}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{p_u}+\cdots+\frac{1}{p_{t-1}}}_{\sigma_2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{p_t}+\cdots+\frac{1}{p_r}}_{\sigma_1}$$

$$\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{\omega-1}}+\cdots+\frac{1}{p_u}+\cdots+\frac{1}{p_{t-1}}$$

$$\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{\omega-1}}+\cdots+\frac{1}{p_u}+\cdots+\frac{1}{p_{t-1}}\quad (2n-1)\text{行}$$

$$\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{\omega-1}}$$

$$\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{\omega-1}}$$

我们在图中下述区间中选取相继的诸素数：

$$p_r^{\frac{1}{\alpha^n}}\quad p_1\quad p_r^{\frac{1}{\alpha^{n-1}}}\quad\cdots\quad p_r^{\frac{1}{\alpha^2}}\quad p_r^{\frac{1}{\alpha}}\quad p_r$$

图 3

此处 $\alpha>1$。

由麦尔顿[1]公式可得

$$\sum_2^x\frac{1}{p}=\log\log x+0.261\cdots+\theta\frac{5}{\log x},\quad -1<\theta<1$$

---

1) 见 “Journal fur die reine und angewandte Mathemtik” B.78,1874， 或兰岛，Handbuch，I，p.201.

$$\prod_{2}^{x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=e^{\frac{7\Theta}{\log x}}\frac{0.561\cdots}{\log x},\quad -1<\Theta<1,$$

此处 log 表示自然对数。

因此我们得

$$\sum_{x}^{x^\alpha}\frac{1}{p}=\log\alpha+\theta\frac{5\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\log x},\ \prod_{x}^{x^\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha}e^{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{7\Theta}{\log x}}.$$

当 $\alpha_0>\alpha$ 时，我们可以取 p_1 充分大，使

$$\sigma_1=\frac{1}{p_t}+\cdots+\frac{1}{p_r}<\log\alpha_0,\ \sigma_2=\frac{1}{p_u}+\cdots+\frac{1}{p_{t-1}}$$

$$<\log\alpha_0,\cdots,\ \sigma_n=\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{v-1}}<\log\alpha_0 \quad (15)$$

及

$$\pi_1=\left(1-\frac{1}{p_t}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)>\frac{1}{\alpha_0},\ \pi_2=\left(1-\frac{1}{p_u}\right)$$

$$\cdots\left(1-\frac{1}{p_{t-1}}\right)>\frac{1}{\alpha_0},\cdots,\pi_n=\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_{r-1}}\right)$$

$$>\frac{1}{\alpha_0}, \quad (16)$$

我们特别假定 $\log\alpha_0<1$。

我们要实现和数的逐步计算，为此需给出阶梯形的图形。

假定我们已经用表达式 $\Sigma_m=1-s_1+s_2-\cdots-s_{2m-1}$ 给出的图形

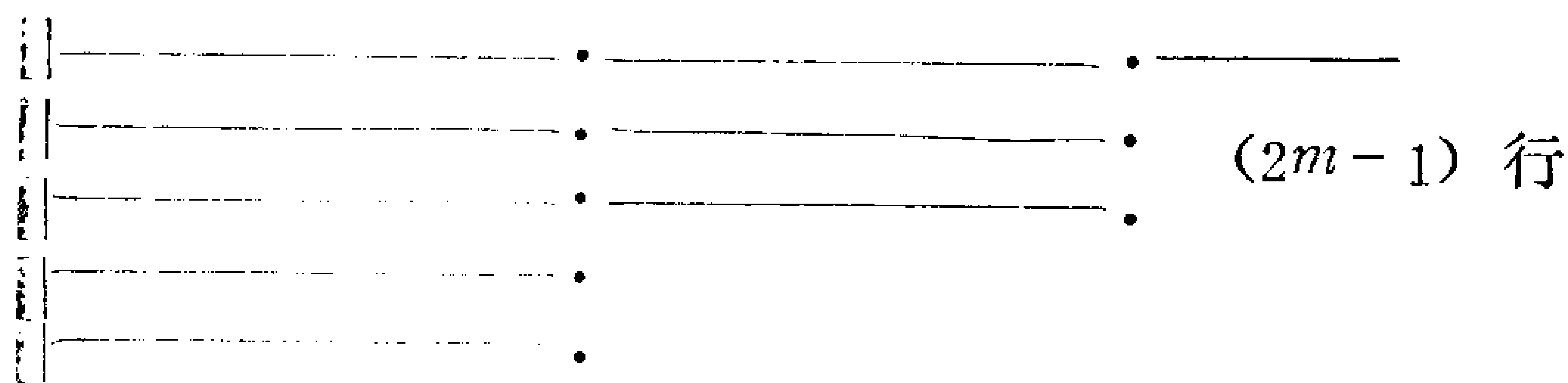


图 4

进行了计算。

我们在图形左边添加 $2m+1$ 行（取它们仅仅为了表达式 $1-\Sigma_1+\Sigma_2-\cdots-\Sigma_{2m+1}$）：

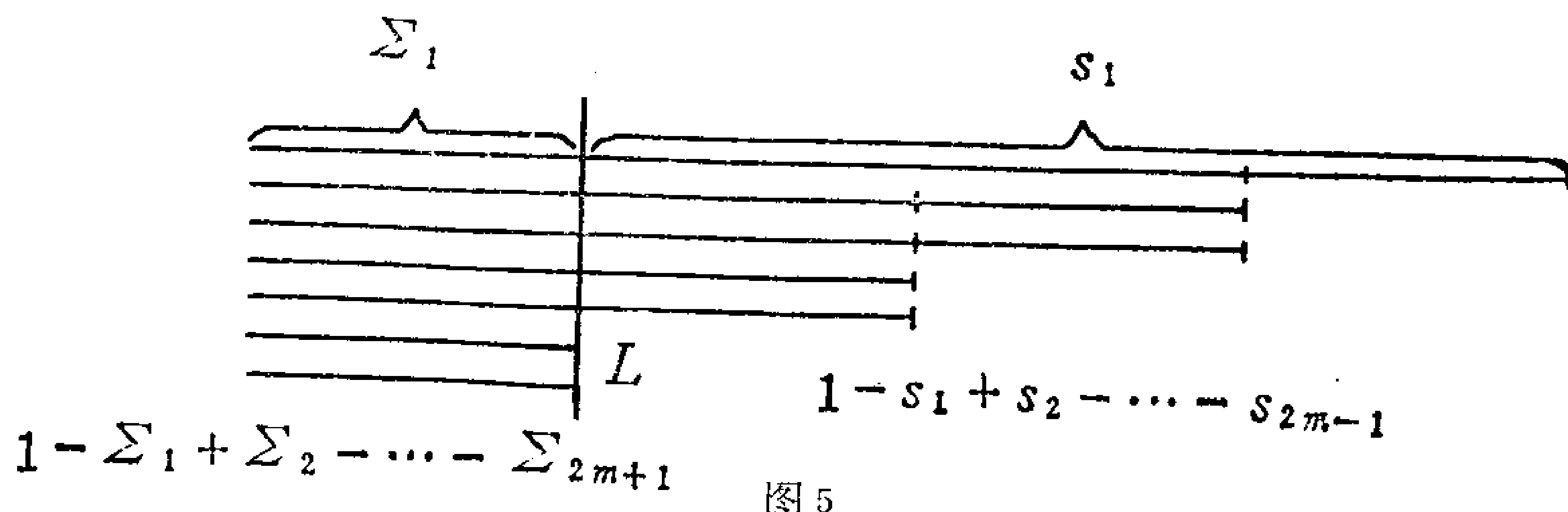


图 5

和 $\Sigma\frac{1}{p_a}$ 现在等于 Σ_1+s_1，考虑下面三种可能情况，

可知 $\Sigma\Sigma\frac{1}{p_a p_b}$ 等于 $\Sigma_2+s_1\Sigma_1+s_2$。

p_a 取自 L 之左及 p_b 亦取自 L 之左(Σ_2)，

p_a 取自 L 之左及 p_b 取自 L 之右($\Sigma_1 s_1$)，

p_a 取自 L 之右及 p_b 亦取自 L 之右(s_2)。

一般言之，我们可以用下法

$$E_{m+1}=1-(\Sigma_1+s_1)+(\Sigma_2+s_1\Sigma_1+s_2)-(\Sigma_3+s_1\Sigma_2+s_2\Sigma_1+s_3)+\cdots-(\Sigma_{2m+1}+s_1\Sigma_{2m}+\cdots+s_{2m-1}\Sigma_2)$$

来计算表达式 $E^m{}_{+1}$。

比较这个表达式与下面的乘积

$$
\begin{aligned}
&(1-\Sigma_1+\Sigma_2-\cdots\pm\Sigma\nu)(1-s_1+s_2-\cdots-s_{2m-1})\\
&\quad=1-(\Sigma_1+s_1)+(\Sigma_2+s_1\Sigma_1+s_2)-\cdots\\
&\quad-(\Sigma_{2m+1}+s_1\Sigma_{2m}+\cdots+s_{2m-1}\Sigma_2)+(\Sigma_{2m+2}\\
&\quad+s_1\Sigma_{2m+1}+\cdots+s_{2m-1}\Sigma_3)-\cdots
\end{aligned}
$$

第一个因子含有尽可能多的项数，即ν等于Σ_1的项数，易见这个乘积包有E_{m+1}的所有项，再加一些括孤，因$\Sigma_1=\sigma_{m+1}<\log\alpha_0<1$，所以由(10)可知它们的值是递减的。因此

$$
\begin{aligned}
E_{m+1}>\pi_{m+1}E_m-(E_{2m+1}+s_1\Sigma_{2m+1}+\cdots\\
+s_{2m-1}\Sigma_3). \qquad (17)
\end{aligned}
$$

我们可以决定最后一个括孤的上界，这是一个不同的$(2m+2)$个$\frac{1}{p}$的乘积之和，其中$\frac{1}{p}$来自与s_1与Σ_1，组成由

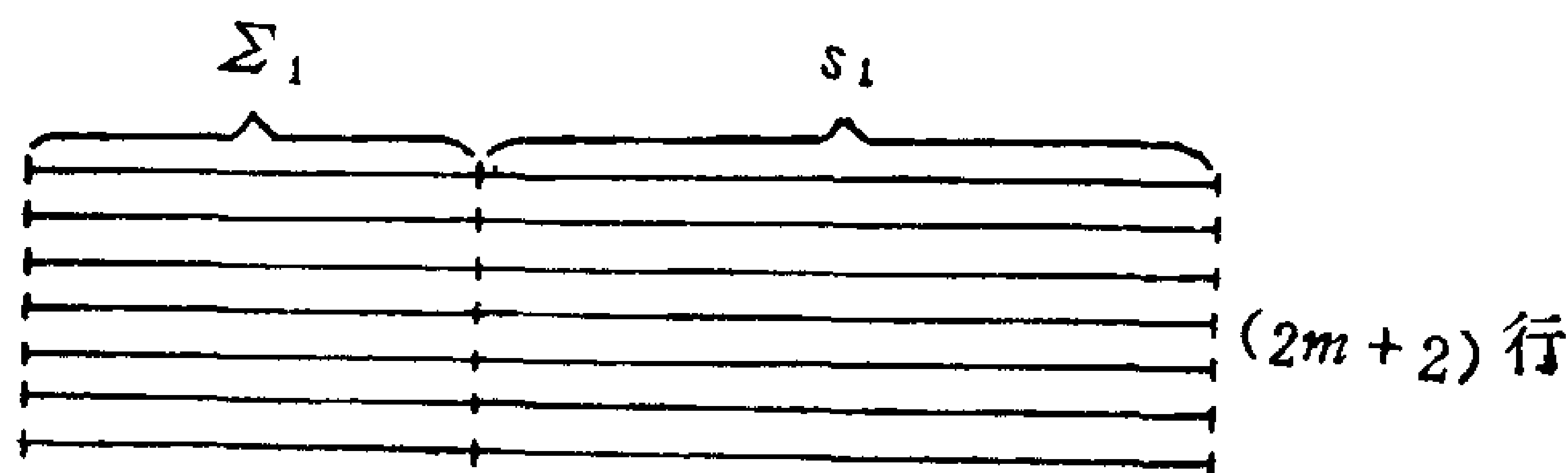


图6

图形计算的和

$$(s_1+\Sigma_1)_{2m+2},$$

即得所有上述形式的乘积之和。

由(11)与(15)得

$$(s_1+\Sigma_1)_{2m+2}<\left(\frac{e(s_1+\Sigma_1)}{2m+2}\right)^{2m+2}$$

$$< \left(\frac{e(m+1)\log\alpha_0}{2(m+1)}\right)^{2m+2} = \left(\frac{e\log\alpha_0}{2}\right)^{2n+2}.$$

我们欲算的括弧（见(17)）更小些，故得

$$E_{m+1} > \pi_{m+1}E_m - \left(\frac{e\log\alpha_0}{2}\right)^{2m+2}. \tag{18}$$

因 $E_1 = 1 - s_1$，所以由(16)得

$$E_1 > 1 - \log\alpha_0,$$

$$E_2 > \pi_2 E_1 - \left(\frac{e\log\alpha_0}{2}\right)^4 > \pi_2\left(1 - \log\alpha_0 - \alpha_0\left(\frac{e\log\alpha_0}{2}\right)^4\right).$$

继续这一方法得

$$E_n > \pi_2\pi_3\cdots\pi_n\left(1 - \log\alpha_0 - \alpha_0\left(\frac{e\log\alpha_0}{2}\right)^4 - \cdots - \alpha_0^{n-1}\left(\frac{e\log\alpha_0}{2}\right)^{2n}\right).$$

或由于 $\pi_1 > 1$，当 $\alpha_0\left(\frac{e\log\alpha_0}{2}\right)^2 < 1$ 时有

$$E_n > \pi_1\pi_2\cdots\pi_n\left(1 - \log\alpha_0 - \frac{\alpha_0\left(\frac{eog\alpha_0}{2}\right)^4}{1 - \alpha_0\left(\frac{e\log\alpha_0}{2}\right)^2}\right).$$

特别地，选取

$$\alpha = 3/2 \quad 与 \quad \alpha_0 = 1.51,$$

我们得

$$E_n>0.3\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right). \tag{19}$$

我们来研究 E_n 中项数构成的数(R)，组成乘积

$$\left(1-\frac{1}{p_1}-\cdots-\frac{1}{p_r}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}-\cdots-\frac{1}{p_{t-1}}\right)^2$$

$$\cdots\left(1-\frac{1}{p_1}-\cdots-\frac{1}{p_{w-1}}\right)^2.$$

这个乘积包有 E_n 所有的项还更多，第一个因子的项数小于 p_r，第二个因子的项数小于 $p_r^{1/\alpha}$ 等等。将 $-\frac{1}{p}$ 换成 1，即得乘积所有的项数，所以

$$R<p_r\cdot p_r^{\frac{2}{\alpha}}\cdots p_r^{\frac{2}{\alpha^n}}<p_r^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}=p_r^5.$$

我们可以将(14)写成形式

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)<\frac{x}{D}0.3\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots$$

$$\left(1-\frac{1}{p_r}\right)-p_r^5. \tag{20}$$

这个公式对于所有相继素数 $p_1,\cdots,p_r$ 都是对的，此处 $p_1>p_e$，其中 p_e 是一个可以决定的素数。

特别地，假定 $p_1=p_{e+1}$ 为第 $e+1$ 个素数。

当问题是要计算 $N(D,x,2,\cdots,p_e,p_1,\cdots,p_r)$ 时，我们在图形（(14)式下面）上增加由表达式

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_e}\right)=1-\Sigma_1+\Sigma_2-\cdots\pm\Sigma_e$$

引起的

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p_e},$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p_e}.$$

它们共 2^e 项，此处行数 $\geqslant e$。

我们如此得到新的图形

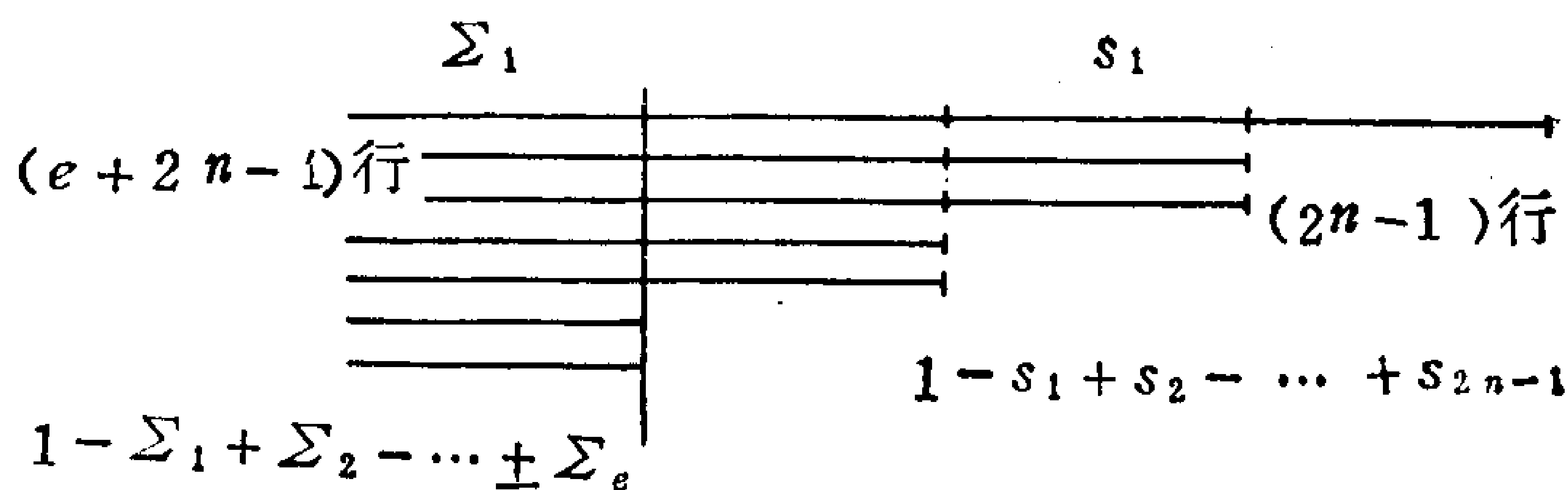


图 7

它用于表达式

$$E_{n+1}=1-(\Sigma_1+s_1)+(\Sigma_2+s_1\Sigma_1+s_2)-\cdots$$
$$+(\Sigma_e+s_1\Sigma_{e-1}+\cdots+s_e)-(s_1\Sigma_e+s_2\Sigma_{e-1}+$$
$$\cdots+s_{e+1})+\cdots+(s_{2n-e}\Sigma_e+\cdots+s_{2n-1}\Sigma_1)$$
$$+\cdots+(s_{2n-1}\Sigma_e),$$

或

$$E_{n+1}=(1-\Sigma_1+\Sigma_2-\cdots+\Sigma_e)(1-s_1+s_2-\cdots$$
$$+s_{2n-1})=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_e}\right)E_n,$$

此处我们假定 e 为偶数。

由(19)我们得公式

$$N(D,x,2,3\cdots,p_r)>\frac{X}{D}0.3\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)-2^e p_r^5. \qquad (21)$$

对于所有 $r(>e)$成立，此处 e 表示一个可以决定的数，请注意$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$的每一项被乘以 E_n 的每一项。

由麦尔顿公式，我们可以决定 c 使对于所有 $r>c$ 皆有

$$N(D,x,2,3,\cdots,p_r)>\frac{0.168x}{D\log p_r}-2^e p_r^5. \qquad (22)$$

此处 c 是一个可以决定的数($c\geqslant e$)。

如果我们选取 $D=1$ 及 $p_r=p(\sqrt[6]{x})$，即不超过$\sqrt[6]{x}$的最大素数：$p_r\leqslant\sqrt[6]{x}<p_{r+1}$，我们得到

$$N(1,x,2,3,\cdots,p(\sqrt[6]{x}))>\frac{1.008x}{\log x}-2^e x^{\frac{5}{6}}>\frac{x}{\log x}$$

对于所有 $x>x_0$ 成立。

我们可以叙述下列定理：

当我们在 x 个相邻整数中，去掉 2 的倍数 3 的倍数，直到 $p(\sqrt[6]{x})$的倍数，则当 $x>x_0$时，剩下的数的个数多于 $\frac{x}{\log x}$。

划数的超始点可以自由选取，而 x_0 是一个可以决定的数。

由(22)，我们还可以得到下述定理：

当$n>n_0$时，在n与$n+\sqrt{n}$之间恒存在一个数，其素因子个数不超过11。

在公式(22)中取

$$D=1,\ x=\sqrt{n}\quad 及\quad p_r=p\left(n^{\frac{1}{11}}\right),$$

我们得到，当$n>n_0$时

$$N\left(1,\sqrt{n},2,3,\cdots p(n^{\frac{1}{11}})\right)>\frac{1.8\sqrt{n}}{\log n}-2^{c}n^{\frac{5}{11}}>1.$$

当我在区间$[n,n+\sqrt{n}]$中去掉所有2的倍数，3的倍数，直到$p(n^{\frac{1}{11}})$的倍数，则至少还剩下一个数，我们取n作为划数的起始点，则在这种情况下，每个因子皆小于$\sqrt[12]{n+\sqrt{n}}$，所以当$n>n_0$时，小于$\sqrt[11]{n}$，即未被划去的数不能包有12个或更多的素因子，凡被2,3,…,式$n(p^{\frac{1}{11}})$除得尽的数都被划掉了。

§5

我们已经假定在公式(21)中的素数

$$2,\ 3,\ \cdots,\ p_r$$

为相继素数

研究相邻素数列

$$q_1,q_2,\cdots,q_{\alpha-1},q_\alpha q_{\alpha+1},\cdots,q_{\gamma-1}\cdot q_\gamma,q_{\ +1},\cdots,q_r,$$

此处$q_1=2$等；的一部分；非相邻素数列

$$q_1,q_2,\cdots q_{\alpha-1}\cdot q_{\ +1},\cdots,q_{\ -1},q_{\gamma+1},\cdots q_r.$$

我们易于推广并如前（见(21)）得到

$$N(D,x,q_1,\cdots,q_{-1},q_{+1},\cdots,q)>\frac{X}{D}\cdot 0.3$$

$$\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_{-1}}\right)\left(1-\frac{1}{q_{+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_r}\right)$$

$$-2^r q_r{}^5.$$

或

$$N(D,x,q_1,\cdots,q_{-1},q_{+1},\cdots,q_r)>\frac{X}{D}\cdot 0.3$$

$$\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{q}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{q_\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_\gamma}\right)-2^r q_r{}^5$$

因此得到

$$N(D,x,q_1,\cdots,q_{-1},q_{+1}\cdots,q_r)$$

$$>\frac{0.168x}{D\log q}\left(1-\frac{1}{q_\alpha}\right)^{1}\cdots\left(1-\frac{1}{q_\gamma}\right)-2^r q_r{}^5.$$

我们研究算术数列

$$\triangle \qquad \triangle+D \qquad \triangle+2D \quad \cdots$$

从 0 至 x 的一段，其中$\triangle$与 D互素、假定

$$D=q_\alpha^a\cdots q_\gamma^c.$$

选取$q=q(\sqrt[6]{x})$，并划去被下列素数除得尽

$$q_1,\cdots,q_{-1},q_{+1},\cdots,q_{-1},q_{+1},\cdots q_r$$

的所有数。则当 $x>x_0$时有

$$N(D,x,q_1,\cdots,q_{-1},q_{+1},\cdots,q)>\frac{0.168x}{\varphi(D)\log q_r}$$

$$-2^{e}q_r^{5}>\frac{1.008x}{\varphi(D)\log x}-2^{e}x^{\frac{5}{6}}>\frac{1}{\varphi(D)}\cdot\frac{x}{\log x}.$$

未被划去的数不能整被

$$q_1,\cdots,q_{\alpha-1},q_{\beta+1},\cdots,q_{\gamma-1},q_{\gamma+1},\cdots,q_r$$

整除，由于Δ与D互素，所以它们亦不能被$q_\alpha,\cdots,q_\gamma$整除。故未被划去的数包有5个或更少的素因子.

因此我们推出下面类似的狄里希勒定理：

每一个算术数列，具首项与公差互素，包含无限多个素因子个数不超过5的项.

§6

我们现在来研究麦尔林筛法，我们划去两列数中所有2的倍数，3的倍数，5的倍数直至p_r的倍数，一般言之，我们研究下面的算术数列

$\triangle$	$\triangle+D$	$\triangle+2D$	$\cdots$
a_1	a_1+p_1	a_1+2p_1	$\cdots$
b_1	b_1+p_1	b_1+2p_1	$\cdots$
a_r	a_r+p_r	a_r+2p_r	$\cdots$
b_r	b_r+p_r	b_r+2p_r	$\cdots$

所有的记号都在§2中已经定义，进而言之，我们假定$a_i\neq b_i$及$p_1\geqslant 3$，记

$$P(\triangle,D,x,a_1,b_1,p_1,\cdots,a_r,b_r,p_r),$$

或简记为

$$P(D,x,p_1,\cdots p_r).$$

这表示第一列的数而又不同于以后诸列的任何数的数的个

数，如前一样，我们得到基本公式

$$P(\triangle,x,a_1,b_1,p_1,\cdots,a_r,b_r,p_r)=P(\triangle,D,x,a_1,b_1,p_1,\cdots,a_{r-1},b_{r-1},p_{r-1})-P(\triangle',Dp_r,x_1,a_1,b_1,p_1,\cdots,a_{r-1},b_{r-1},p_{r-1})-P(\triangle'',Dp_r,x,a_1,b_1,p_1\cdots,a_{r-1},b_{r-1},p_{r-1}),$$

或简记为

$$P(D,x,p_1,\cdots,p_r)=(P(D,x,p_1,\cdots,p_{r-1})-2P(Dp_r,x,p_1,\cdots p_{r-1}). \tag{23}$$

在此我们用 $2P\ (Dp_r,x,p_1,\cdots,p_{r-1})$ 表示形为 $P(\triangle,Dp_r,x,a_1,b_1,p_1,\cdots,a_{r-1},b_{r-1}p_{r-1})$ 的两个表达式之和，请勿混淆或误解。

由（23），我们可得类似于(5）的一般公式

$$\frac{D}{x}P(D,x,p_1,\cdots,p_r)>1-\sum_{a\leqslant r}\frac{2}{p_a}+\sum\sum_{\omega 1}\frac{2^2}{p_ap_b}\left(1-\sum_{c<b}\frac{2}{p_c}\right)+\sum_{\omega 1'}\sum\sum_{\omega 1}\sum\frac{2^4}{p_ap_bp_cq_d}\left(1-\sum_{c<d}\frac{2}{p_c}\right)+\cdots+\frac{RD}{x}, \tag{24}$$

此处 $\omega'_1\leqslant\omega_1$ 等。

R 表示公式中形如 $\pm\frac{1}{n}$ 的项数 $\left(\text{此处}\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\text{等}\right)$。

我们已假定 $p_1\geqslant 3$。除特别声明外，均如（5）所示。

特别地假定 $p_1=3$，$p_2=5$，$p_3=7$ 等等，我们可以给（24）以如下形式：

$$P(D,x,3,5,\cdots,p_r)>\frac{x}{D}\left[1-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}-\cdots-\frac{2}{p_r}\right.$$

$$+\frac{4}{5.3}+\frac{4}{7.3}+\frac{4}{7.5}\left(1-\frac{2}{3}\right)+\cdots+\frac{4}{p_r.3}$$

$$\frac{4}{p_r.5}\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{p_r.7}\left(\begin{matrix}1-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\\+\frac{4}{5.3}\end{matrix}\right)+\frac{4}{p_r.7}$$

$$\left(\begin{matrix}1-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}-\frac{2}{7}\\+\frac{4}{5.3}\\+\frac{4}{7.3}+\frac{4}{7.5}\left(1-\frac{2}{3}\right)\end{matrix}\right)+\cdots\Bigg]-R, \qquad (25)$$

此处我们可以去掉带有正号的每一项（括弧包在内）。

例如，研究下面算术数列从 0 至 11，776 间的一段

1 3 5 7 9 11 13 15 …11,769 11,731 11,773 11,775

{0 3 6 9 12 15 …11,769 11,772 11,775
{ 1 4 7 10 13 11.770 11.773 11.776

…

{ 0 19…11,761
{ 15 …11,757 11,776

划数的起始点为 0 与 11,776（见§1）。

因 11，776 = $2^9 \cdot 23$ 除不尽 3,5,7,…,19，所以由(25)并注意 $a_i \neq b_i$，我们得

$$P(2,11,776,3,5,\cdots,19)>\frac{11.776}{2}\Bigg[1-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}-\frac{2}{7}$$

$$-\frac{2}{11}-\frac{2}{13}-\frac{2}{17}-\frac{2}{19}+\frac{4}{5.3}+\frac{4}{7.3}+\frac{4}{7.5}\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

$$+\frac{4}{11.3}+\frac{4}{11.5}\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{11.7}\left(1-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{4}{5.3}\right)$$

$$+\frac{4}{13.3}+\frac{4}{13.5}\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{13.7}\left(1-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{4}{5.3}\right)$$

$$+\frac{4}{17.3}+\frac{4}{17.5}\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{19.3}+\frac{4}{19.5}$$

$$\left.\left(1-\frac{2}{3}\right)\right]-R,$$

此处

$$R=1+14+4+16+52+52+32=171,$$

所以

$$p(2,11,776,3,5,\cdots,19)>296-117=125.$$

第一列中未被去的数(t)的个数多于125．它们有下述性质：t 与 $11,776-t$ 不能被 2，3，5，…，19 整除。由于 $\sqrt[3]{11,776}<22.9$，所以他们不能为3个或更多的素数的乘积。

因此 11,776 可以表示为两个素因子个数不超过 2 的整数之和，表法多于 125．

无论如何，我们未能用这个方法给出哥德巴赫定理正确答案的一个例子．

然而，我们能从（24）得出重要的结果，推导的方法与前面完全相同．

我们只要在每个地方将$\frac{1}{p_i}$换成$\frac{2}{p_i}$．

将$\frac{1}{p_i}$换成$\frac{2}{p_i}$，我们用§4所示阶梯形图形来计算。运用公式

$$\prod_{3}^{x}\left(1-\frac{2}{p}\right)=\frac{0.8322}{\log^2 x}\cdot e^{\frac{c\theta}{\log x}}.$$

而将§4所考虑的和与乘积换为

$$\sigma_1=\frac{2}{p_t}+\cdots+\frac{2}{p_r}<2\log\alpha_0,\ 等;$$

与

$$\prod_1=\left(1-\frac{2}{p_t}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_r}\right)<\frac{1}{\alpha_0^{\,2}},\ 等.$$

我们现在假定$2\log\alpha_0<1$。

类似于（18），我们得

$$E_{i+1}>\Pi_{m+1}E_m-(e\log\alpha_0)^{2m+2},$$

所以

$$E_n>\Pi_1\cdots\Pi_n\left(1-2\log\alpha_0-\frac{\alpha_0^{\,2}(e\log\alpha_0)^4}{1-\alpha_0^{\,2}(e\log\alpha_0)^2}\right).$$

特别地，选配

$$\alpha=\frac{5}{4}=1.25\quad 与\quad \alpha_0=1.2501,$$

因此

$$E_n>0.05\left(1-\frac{2}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_r}\right). \tag{26}$$

我们研究E_n中的项数（R）.考虑乘积

$$\left(1-\frac{1}{p_1}-\cdots-\frac{2}{p_r}\right)\left(1-\frac{2}{p_1}-\cdots-\frac{2}{p_{t-1}}\right)^2\cdots$$

$$\left(1-\frac{2}{p_1}-\cdots-\frac{2}{p_{u-1}}\right)^2.$$

这个乘积包有E_n所有的项及更多项。第一个因子的项数$(2r+1)$小于p_r，此处$p_1>3$，第二个因子的项数小于$p_r^{1/\alpha}$，等等. 故得

$$R<p_r p_r^{\frac{2}{\alpha}}\cdots p_r^{\frac{2}{\alpha^n}}<p_r^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}=p_r^9.$$

我们得到

$$P(D,x,p_1,\cdots,p_r)>\frac{x}{D}0.05\left(1-\frac{2}{p_1}\right)\cdots$$

$$\left(1-\frac{2}{p_r}\right)-p_r^9. \quad (27)$$

这个公式对于所有相继素数$p_1,\cdots,p_r$皆成立，此处$p_1\geqslant p_e$，其中p_e是一个可以决定的素数.

我们得到下面与（21）相类似的公式. 对于所有$r>e$皆有

$$P(D,x,3,5,\cdots p_r)>\frac{x}{D}\cdot 0.05\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdots$$

$$\left(1-\frac{2}{p_r}\right)-3^e p_r^9. \quad (28)$$

因此对于所有$r>c$（$\geqslant e$）皆有

$$P(D,x,3,5,\cdots,p_r)>\frac{x}{D}\cdot\frac{0.041}{(\log p_r{}^2)}-3^e p_r^9 \quad (29)$$

（特别地取$p_r=p(x^{\frac{1}{11}})$. 则对于所有$x>x_0$皆有

$$P\left(D,x,3,5,\cdots,p\left(x^{\frac{1}{1}}\right)\right)>\frac{0.41x}{D(\log x)^2}$$

$$-3^e x^{\frac{9}{10}}>\frac{0.4x}{D(\log x)^2}. \qquad (30)$$

假定 $D=1$，则我们可以叙述出下面的定理：

当我们去掉双行 x 项的数列中的 3 的倍数，5 的倍数，直至 $p\left(x^{\frac{1}{10}}\right)$ 的倍数。当 $x>x_0$ 时，至少还多于 $0.4x/(\log x)^2$ 项。

我们已经假定

$$a_i \neq b_i.$$

这就是说，没有一个两重划数会变成一个单重划数，当问题为研究数 $x=2^s p_\alpha^t\cdots p_\gamma^v$ 的哥德巴赫分析，我们可以看出

$$a_\alpha=b_\alpha,\ \cdots,\ a_\gamma=b_\gamma.$$

当划数被缩小后（比较§5）P 的下界自然不会减小。这时 $\frac{2}{p_\alpha}$ 需换成 $\frac{1}{p_\alpha}$ 及 $\frac{2}{p_\gamma}$ 需换成 $\frac{1}{p_\gamma}$，如此则得 P 的新的下界：

$$\frac{0.4x}{D(\log x)^2}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{p_\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_\gamma}\right)}{\left(1-\frac{2}{p_\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_\gamma}\right)}>\frac{0.4x}{D(\log x)^2}.$$

如同前例一样，选取 $D=2$，则得下面类似于哥德巴赫定理的结果：

每一个大于 x_0 的偶数 x 皆可分成两个素因子个数皆不超过 9 的整数之和。x_0 是一个可以决定的数而素因子可以是相同的亦可以是相异的。

我们也可以得到下面的定理：

存在无穷多个数对，其差皆为 2，每个数的素因子 个数皆不超过 9。

§7

我们也可以决定使用埃拉朵斯染尼氏与麦尔林筛法后，剩下未被筛去的元素个数的上界估计。

我们用下面的不等式

$$N(\triangle, D, x, a_1, p_1, \cdots a_r, p_r, \cdots, a_n, p_n) \leqslant N(\triangle, D, x, a_1, p_1, \cdots, a_r, p_r),$$

或简记为

$$N(D, x, p_1, \cdots, p_r, \cdots p_n) \leqslant N(D, x, p_1, \cdots, p_r), \tag{31}$$

此处 $r<n$。

我们亦用公式

$$N(D, x, p_1, \cdots, p_r) = N(D, x) - \sum_{a \leqslant r} N(Dp_a, x) + \sum_{a \leqslant r} \sum_{b < a} N(Dp_ap_b 1, p_1, \cdots, p_{b-1}) \quad . \tag{31'}$$

为了估计第一个和，我们运用（31）及（3′）。继续 这样做，我们得类似于（14)的公式：

$$N(D, x, p_1, \cdots, p_r) < \frac{x}{D}\Big[1 - \sum_{a \leqslant r} \frac{1}{p_a} + \sum_{b \leqslant r} \sum_{\substack{b<a \\ b<r}} \frac{1}{p_ap_b} - \sum_{a<r} \sum_{\substack{b<a \\ b<r}} \sum_{\substack{c<b \\ c<t}} \frac{1}{p_ap_bp_c} + \sum_{a<r} \sum_{\substack{b<a \\ b<r}} \sum_{\substack{c<b \\ c<t}} \sum_{\substack{d<c \\ d<t}}$$

$$\frac{1}{p_a p_b p_c p_d}-\cdots\Big]+R\ , \tag{32}$$

或者简记为

$$N(D,x,p_1,\cdots p_r)<\frac{x}{D}[1-S_1+S_2-\cdots+S_{2n}]+R,$$

此处表达式

$$E_n=1-S_1+S_2-\cdots+S_{2n}$$

用图形

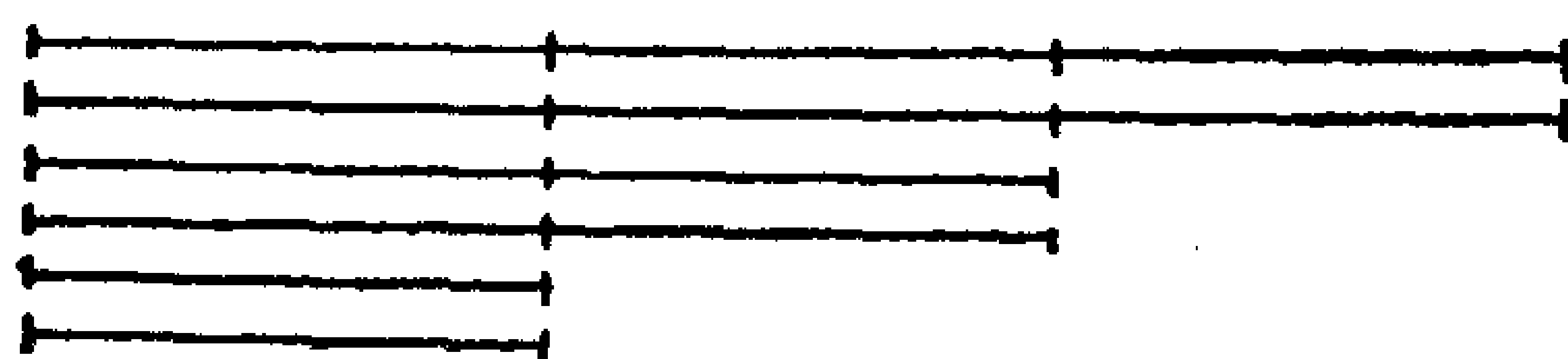


图 8

来计算。

用与以前相同的方法得

$$E_{m+1}<\Pi_{m+1}E_m+\left(\frac{e\log\alpha_0}{2}\right)^{2m+3},$$

特别有

$$E_1<\Pi_1+\left(\frac{e\log\alpha_0}{2}\right)^3$$

与

$$E_2<\Pi_1\Pi_2\left[1+\alpha_0\left(\frac{e\log\alpha_0}{2}\right)^3+\alpha_0^2\left(\frac{e\log\alpha_0}{2}\right)^5\right].$$

继续下去，我们得

$$E_n < \Pi_1 \cdots \Pi_n \left[1 + \alpha_0 \left(\frac{e\log\alpha_0}{2} \right)^3 + \alpha_0^2 \left(\frac{e\log\alpha_0}{2} \right)^5 + \cdots \right]$$

或

$$E_n < \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \left(1 + \frac{\alpha_0 \left(\frac{e\log\alpha_0}{2} \right)^3}{1 - \alpha_0 \left(\frac{e\log\alpha_0}{2} \right)^2}\right), \tag{33}$$

此处 $\alpha_0 \left(\frac{e\log\alpha_0}{2} \right)^2 < 1.$

特别取

$$\alpha = 3/2 \quad 与 \quad \alpha_0 = 1.51,$$

则得

$$E_n < 1.505 \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

为了研究 E_n 中的项数（R），我们考虑下面的乘积

$$\left(1 - \frac{1}{p_1} - \cdots - \frac{1}{p_r}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{p_1} - \cdots - \frac{1}{p_{t-1}}\right)^2 \cdots \left(1 - \frac{1}{p_1} - \cdots - \frac{1}{p_{u-1}}\right)^2.$$

如前一样可得

$$R < p_r^{\,2} p_r^{\frac{2}{\alpha}} \cdots p_r^{\frac{2}{\alpha^n}} < p_r^{\frac{2\alpha}{\alpha - 1}} = p_r^{\,6}.$$

我们可以给（32）以下面的形式

$$N(D, x, p_1, \cdots, p_r) < \frac{x}{D} \cdot 1.505 \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots$$

$$\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+p_r^{6},$$

故对于所有 $r>e$ 皆有

$$N(D,x,2,3,\cdots p_r)<\frac{x}{D}\cdot 1.505\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+2^{e}p_r^{6}.$$

由麦尔顿公式，我们得

$$N(D,x,2,3,\cdots,p_r)<\frac{0.9x}{D\log p_r}+2^{e}p_r^{6}$$

对于所有 $r>c$ 皆成立，此处 $c\geqslant e$.

特别取 $p_r=p(2\sqrt[7]{x})$.则由切比雪夫定理可知

$$\sqrt[7]{x}<p_r\leqslant 2\sqrt[7]{x},$$

所以对于所有 $x>x_0$，我们有

$$N(1,x,2,3,\cdots,p(2\sqrt[7]{x}))<\frac{6.5x}{\log x}+2^{e+6}x^{\frac{6}{7}}$$

$$<\frac{7x}{\log x}. \tag{34}$$

运用不等式（31）可知，对于所有 $x>x_0$，下式成立

$$N(1,x,2,\cdots,p(\sqrt{x}))\leqslant N(1,x,2,\cdots,p(\sqrt[6]{x}))$$

$$\leqslant N(1,x,2,\cdots p(2\sqrt[7]{x}))<\frac{7x}{\log x},$$

特别地，对于所有 $x>x_0$ 有

$$\pi(x)-\pi(\sqrt{x})+1<\frac{7x}{\log x}.$$

此处 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数个数. 所以

$$\pi(x)<\frac{7x}{\log x}+\sqrt{x}<\frac{8x}{\log x}.$$

与§4的定理相比较，我们得

$$\frac{x}{\log x}<N(1,x,2,\cdots,p(\sqrt[6]{x}))<\frac{7x}{\log x}. \quad (35)$$

当我们在 x 个数中去掉 $2,3\cdots,p(\sqrt[6]{x})$的倍数后，总可以剩下 N 个数，此处 N 为区间 $\left[\frac{x}{\log x},\frac{7x}{\log x}\right]$中的一个数，其中 $x>x_0$。

最后我们来研究麦尔林筛法，我们得到类似于（33）的公式：

$$E_n<\left(1-\frac{2}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_n}\right)\left(1+\frac{\alpha_0{}^2(e\log\alpha_0)^3}{1-\alpha_0{}^2(e\log\alpha_0)^2}\right).$$

特别地，取

$$\alpha=1.25 \quad 与 \quad \alpha_0=1.2501,$$

则得

$$E_n<1.82\left(1-\frac{2}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_r}\right).$$

如前一样，可得

$$P(D,x,3,5,\cdots,p_r)<\frac{x}{D}\cdot 1.82\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_r}\right)+3^e p_r{}^{10},$$

或

$$P(D,x,3,5,\cdots,p_r)<\frac{1.6x}{D(\log p_r)^2}+3^e p_r{}^{10}, \quad (36)$$

对于所有 $r>c$ 成立，此处 $c\geqslant e$（见§6）。

选取 $p_r=p(2x^{\frac{1}{11}})$. 则对于所有 $x>x_0$，我们有

$$P\left(D,x,2,3,\cdots,p(2x^{\frac{1}{11}})\right)<\frac{194x}{D(\log x)^2}$$

$$+3^{r+1}x^{\frac{1}{11}}<\frac{195x}{D(\log x)^2},$$

运用不等式

$$P[D,x,2,3,\cdots,p(\sqrt{x})]\leqslant P[D,x,2,3,\cdots,p(2\sqrt[11]{x})]$$

及等式

$$Z(x)-2(\sqrt{x}+2)+1=P[2,x,2,3,\cdots,p(\sqrt{x})],$$

此处 $Z(x)$ 表示不超过 x 的孪生素数个数，及此处我们取0与2作为划数的起始点。

我们则得

$$Z(x)<\frac{195x}{2(\log x)^2}+\sqrt{x}+2,$$

或

$$Z(x)<\frac{100x}{(\log x)^2}.$$

对于所有 $x>x_0$ 成立，此处 x_0 表示一个可以决定的数，及 $Z(x)$ 表示不超过 x 的孪生素数个数。

编者注：编者对原文中的某些公式作了一些修改。

7.埃拉朵斯染尼氏筛法的新改进

布赫夕塔布

在1919年；布朗〔1〕给出一个方法，将埃拉朵斯染尼氏筛法用于一系列数论问题。

布朗证明了存在无穷多个整数对满足1)整数对中每个整数均最多只有9个素因子，及2)每对整数之差均等于2，此处2可以换成任意偶数。

布朗也证明了每个大偶数都是两个素因子个数不超过9的整数之和。1924年，拉代马海尔〔2〕将上述结果中的9改进为7。在1930年，我已能将7改进为6。1932年，埃斯特曼也做到了这一步。

本文，我将给出这些问题一个新的处理，使素因子个数降低到5。用更精密的积分迭代，素因子个数还可以进一步减少。

我们研究方程 $2=n'-n''$与$2N=n'+n''$的可解性问题，此处n'与n''的素因子个数被要求不超过一个固定常数。布朗与其后继者考虑的其他问题也可以类似地来处理。

同时，我得到了上述方程解数的较好的上界估计。

引1与引2给出的估计是由普通的布朗方法求得的。

有别与其他工作者为，我将要在这里给出充分接近的上下界估计。本文的基本部分已在我的文章〔3〕中作了叙述。

1.我们用$P_\omega(x,y)$表示$\leqslant x$的非负整数个数，这些数不

包含在下面 $2r+1$ 个数列中的任何一个之中

$$
\begin{array}{llll}
a_0, & a_0+p_0, & a_0+2p_0, \cdots \\
a_1, & a_1+p_1, & a_1+2p_1, \cdots \\
b_1, & b_1+p_1, & b_1+2p_1, \cdots \\
 & \cdots & \\
a_r, & a_r+p_r, & a_r+2p_r, \cdots \\
b_r, & b_r+p_r, & b_r+2p_r, \cdots
\end{array} \tag{1}
$$

此处 $p_0=2, 0\leqslant a_0\leqslant 2, p_i$ 为 $\leqslant y$ 的素数，具有次序 $3=p_1<\cdots<p_r\leqslant y, 0\leqslant a_i<p_i, 0\leqslant b_i<p_i, a_i\neq b_i$，及指标 ω 表示(1)中整数集合 a_i 与 b_i。

引 1. 若 $p_1=3, p_2, \cdots, p_r$ 为所有 $\leqslant\sqrt[10]{x}$ 的奇素数，则

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{10}})>98\frac{cx}{\log^2 x}.$$

对于 a_i 与 b_i 的集合 ω 一致地成立，此处 c 是一个常数。

依照上面引用的拉代马海尔的文章可得

$$P_\omega\left(x, x^{\frac{1}{10}}\right)=P_\omega(x, p_r)>\frac{x}{2}E-R,$$

此处

$$
\begin{aligned}
E=&\left(1-2\sum_{1\leqslant a\leqslant r}\frac{1}{p_a}\right)+\sum_{1\leqslant a<r}\sum_{1\quad b\leqslant r_1}\frac{2^2}{p_a p_b}\\
&\left(1-2\sum_{1<c<b}\frac{1}{p_c}\right)++\sum_{1\leqslant a\leqslant r}\sum_{1\leqslant b\leqslant r_1}\sum_{1<c<r_1}\\
&\sum_{1<d<r_2}\frac{2^4}{p_a p_b p_c p_d}\left(1-2\sum_{1<e<d}\frac{1}{p_e}\right)+\cdots
\end{aligned}
$$

及 R 表示 E 中项 $\dfrac{1}{p_a p_b\cdots}$ 的个数。

命 $r=r_1$ 及 p_r 表示 $\leqslant x^{\frac{1}{10}}$ 最大的素数。命 p_{r_k} 表示 $\leqslant x^{\frac{1}{10Bh^{k-2}}}$ 的最大素数，此处 $2\leqslant k\leqslant t-1$，

$$B=\frac{22}{17}-\varepsilon \text{ 及 } h=\sqrt[4]{e}-\varepsilon.$$

其中 ε 为任意给予正数，t 适合 $p_{r_{t+1}}^{\frac{1}{h}}<\omega_0\leqslant p_{r_{t+1}}$.

当 $t+1<k\leqslant n$ 时，我们取 $p_{r_k}=p_{r_{t+1}}$ 及 $p_{r_{n+1}}=p_0=2$.

当 $k=1,2,\cdots,n$ 时，我们用 E_k 表示E中那些项之和，这些项的分母只含指标大于 r_{k+1} 的素因子，即分母最多含有 $2k+1$ 个素因子。我们有 $E_n=E$，及

$$E_k=1-E_k^{(1)}+\cdots+E_k^{(2k)}-E_k^{(2k+1)},$$

此处 $E_k^{(i)}$ 表示E_k 中分母正好含有 i个素因子的项之和。

命$S_k^{(i)}$ 表示数

$$\frac{2}{p_{r_{k+1}+1}},\ \frac{2}{p_{r_{k+1}+2}},\ \cdots,\ \frac{2}{p_{r_k}}.$$

的 i 次初等对称函数及

$$\Pi_k=\prod_{i=r_{k+1}+1}^{r_k}\left(1-\frac{2}{p_i}\right),$$

则得不等式

$$E_{k+1}\geqslant E_k\Pi_{k+1}-\Phi_{k+1}. \tag{2}$$

此处

$$\Phi_{k+1}=S_{k+1}^{(2k+4)}+S_{k+1}^{(2k+3)}E_k^{(1)}+\cdots+S_{k+1}^{(3)}E_k^{(2k+1)}$$

$$\Phi_{k+1}=0,\text{当 } k+1>t, \tag{3}$$

及

$$E_1 > \Pi_1 - S_1^{(4)}. \tag{4}$$

不断应用不等式(2)与(4)可得

$$E = E_n > \Pi_1 \Pi_2 \cdots \Pi_n\Big(1 - \frac{1}{\Pi_1} S_1^{(4)} - \frac{1}{\Pi_1 \Pi_2} \Phi_2 - \frac{1}{\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3} \Phi_3 - \cdots \Big).$$

选取 ω_0 使

$$S_1^{(1)} = 2 \sum_{a=r_2+1}^{r_1} \frac{1}{p_a} < 2\log \frac{22}{17} < 0.516$$

$$S_k^{(1)} = 2 \sum_{a=r_{k+1}+1}^{r_k} \frac{1}{p_a} < 2\log {}^4\sqrt{e} = \frac{1}{2} (2 \leqslant k \leqslant t),$$

$$S_k^{(i)} \leqslant \frac{S_k^{(1)i}}{i!} < \frac{1}{2^i i!} \ (1 \leqslant i \leqslant 2k+1 \quad 及$$

$$2 \leqslant k \leqslant t).$$

特别地,

$$S_1^{(\ )} < \frac{S_1^{(1)i}}{4!} > 0.003.$$

所以

$$\frac{1}{\Pi_1} = \prod_{i=r_2+1}^{r_1} \left(1 - \frac{2}{p_i}\right)^{-1} < \left(\frac{22}{17}\right)^2 < 1.675,$$

$$\frac{1}{\Pi_k} = \prod_{i=r_{k+1}+1}^{r_k} \left(1 - \frac{2}{p_i}\right)^{-1} < \sqrt{e} \ (2 \leqslant k \leqslant t).$$

将 $E_k^{(i)}$ 表示为

$$E_k^{(i)} = S_k^{(\ )} + S_k^{(i-1)} E_{k-1}^{(1)} + \cdots + S_k^{(1)} E_{k-1}^{(i-1)}$$

$$+E_{k-1}^{(i)}\ (i=1,2,\cdots,2k+1,\ E_{k-1}^{(2)}$$
$$=E_{k-1}^{(2\ +1)}=0).$$

因

$$E_1^{(i)}=S_1^{(i)}<2.14\cdot\frac{1}{4^i}\ (i=1,2,3),$$

所以对于所有 $k\leqslant t-1$ 皆有

$$E_k^{(i)}<2.14\frac{1}{4^i}e^{2(\ -1)},$$

及由(3)得

$$\Phi_{k+1}<2.14\cdot\frac{1}{4^{2\ +4}}e^{2(\ -1)}(e^2-5)\ (2\leqslant k+1\leqslant t).$$

因此

$$\Phi=\frac{1}{\Pi_2}\Phi_2+\frac{1}{\Pi_2\Pi_3}\Phi_3+\cdots<2.14(e^2-5)\frac{1}{4^6}$$
$$\left(e^{\frac{1}{2}}+e^{\frac{6}{2}}\frac{1}{4^2}+e^{\frac{11}{2}}\frac{1}{4^4}+\cdots\right)$$
$$=2.14(e^2-5)e^{\frac{1}{2}}4^{-6}\left(1-\frac{e^{5\ 2}}{16}\right)^{-1}<0.0087,$$

及

$$1-\frac{1}{\Pi_1}(S_1^{(1)}+\Phi)>0.98.$$

记

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(2\log\log x+\sum_{3\ \ p<x}\log\left(1-\frac{2}{p}\right)\right).$$

当 n 充分大时，我们有

$$\Pi_1\cdots\Pi_n=\prod_{3\ \ p<x^{\frac{1}{10}}}\left(1-\frac{2}{p}\right)=100\cdot\frac{e^A}{\log^2 x}$$

$$+O\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)$$

及

$$E>98\frac{2c}{\log^2 x}+O\left(\frac{1}{\log^3 x}\right),$$

此处 $c=\frac{1}{2}e^{A}=0.4161\cdots$.

R 不超过表达式

$$\left(1-\sum_{a=1}^{r_1}\frac{2}{p_a}\right)\left(1-\sum_{b=1}^{r_1}\frac{2}{p_b}\right)\left(1-\sum_{c=1}^{r_1}\frac{2}{p_c}\right)$$
$$\left(1-\sum_{d=1}^{r_2}\frac{2}{p_d}\right)\cdots,$$

中项 $\frac{1}{p_a p_b\cdots}$ 的个数，所以

$$R\leqslant(2r_1+1)^3(2r_2+1)^2\cdots(2r_n+1)^2$$
$$<p_{r_1}^3 p_{r_2}^2\cdots p_{r_n}^2<A_1 x^{\frac{3}{10}}x^{\frac{2}{10B}}x^{\frac{2}{10Bh}}\cdots$$
$$=A_1 x^{\frac{3}{10}+\frac{2h}{10B(h-1)}}.$$

因 $\frac{3}{10}+\frac{2h}{10B(h-1)}<0.999$, 此处取 ε 充分小，所以

$$R<O(x^{0.999})=O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right).$$

因此

$$P_{\omega}(x,x^{\frac{1}{10}})>98\frac{cx}{\log^2 x}+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right).$$

引2. $P_{\omega}\left(x,\ x^{\frac{1}{10}}\right)<101.6\ \frac{cx}{\log^2 x}+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$.

用同样的记号可知对于 $3=p_1<\cdots<p_r<x^{\frac{1}{10}}$ 有

$$P_\omega\left(x,\ x^{\frac{1}{10}}\right)<\frac{x}{2}E+R+1,$$

此处

$$E=1-\sum_{a\leqslant r_1}\frac{2}{p_a}\left(1-\sum_{b\leqslant a}\frac{2}{p_b}\right)-\sum_{a\leqslant r_1}\sum_{b\leqslant r_1}\sum_{c\leqslant r_2}\frac{2^3}{p_a p_b p_c}\left(1-\sum_{d\leqslant c}\frac{2}{p_d}\right)-\cdots$$

其中 $r\geqslant r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots$，命 p_{r_1} 为 $\leqslant x^{\frac{1}{10}}$ 的最大素数，即 $r=r_1$。当 $2\leqslant k\leqslant t+1$ 时，命 p_{r_k} 表示 $\leqslant x^{\frac{1}{10B^{k-2}}}$ 的最大素数，此处 $B=\frac{26}{23}-\varepsilon$ 及 $h=\sqrt[4]{e}-\varepsilon$，其中 t 适合 $p_{r_{t+1}}^{\frac{1}{h}}<\omega\leqslant p_{r_{t+1}}$。当 $t+1\leqslant k\leqslant m$ 时，定义 $p_{r_k}=p_{r_{t+1}}$ 及 $p_{r_{m+1}}=2$，则

$$E_k=1-E_k^{(1)}+E_k^{(2)}-\cdots+E_k^{(2k)}\ (1\leqslant k\leqslant t),$$
$$E_m=E,$$

及

$$E_{k+1}\geqslant\Pi_{k+1}E_k+\Phi_{k+1},$$

此处

$$\Phi_{k+1}=S_{k+1}^{(2k+3)}+S_{k+1}^{(2k+2)}E_k^{(1)}+\cdots+S_{k+1}^{(3)}E_k^{(2k)},\ \Phi_{k+1}=0，当 k\geqslant t$$

及

$$E_1<\Pi_1+S_1^{(3)}.$$

不断地运用上面的不等式可得

$$E=E_m<\Pi_1\cdots\Pi_m\left(1+\frac{1}{\Pi_1}S_1^{(3)}+\frac{1}{\Pi_1\Pi_2}\Phi_2+\frac{1}{\Pi_1\Pi_2\Pi_3}\Phi_3+\cdots\right).$$

选取 ω。满足

$$S_1^{(1)}=2\sum_{a=\ \ 2+1}^{\ \ 1}\frac{1}{p_a}<2\ \log\frac{26}{23}<0.2453,$$

$$S_1^{(3)}<\frac{S_1^{(1)3}}{6}<0.0025,$$

$$\frac{1}{\Pi_1}=\prod_{a=r_2+1}^{r_1}\left(1-\frac{2}{p_a}\right)^{-1}<\left(\frac{26}{23}\right)^2<1.28,$$

当 $k\geqslant 2$ 时，$S_k^{(i)}$ 与 $\frac{1}{\Pi_k}$ 的估计类似于引 1．现在我们估计 Φ_i 如下：

$$\Phi_2=S_2^{(5)}+S_2^{(4)}E_1^{(1)}+S_2^{(3)}E_1^{(2)}<0.00154,$$
$$E_2^{(1)}=S_1^{(1)}+E_1^{(1)}<0.746$$
$$E_2^{(2)}=S_2^{(2)}+S_2^{(1)}E_1^{(1)}+E_1^{(2)}<0.278,$$
$$E_2^{(3)}=S_2^{(3)}+S_2^{(2)}E_1^{(1)}+S_2^{(1)}E_1^{(2)}<0.068,$$
$$E_2^{(4)}=S_2^{(4)}+S_2^{(3)}E_1^{(1)}+S_2^{(2)}E_1^{(2)}<0.012,$$

及由 $E_2^{(i)}<4.45\frac{1}{4^i}\ (i=1,2,3,4)$ 可得

$$E_k^{(i)}<4.45e^{2(\ \ -2)}\frac{1}{4^i}\ (i=1,2,\cdots 2k),$$

及

$$\Phi_{\ +1} < 4.45 e^{2(\ -2)} \frac{1}{4^{2\ +3}} (e^2-5).$$

因此

$$\Phi = \frac{1}{\Pi_2 \Pi_3} \Phi_3 + \frac{1}{\Pi_2 \Pi_3 \Pi_4} \Phi_4 + \cdots < 4.45$$

$$(e^2-5) e \left(\frac{1}{4^7} + \frac{\sqrt{e^5}}{4^9} + \frac{\sqrt{e^9}}{4^{11}} + \cdots \right)$$

$$= 4.45 (e^2-5) e \cdot 4^{-7} \left(1 - \frac{e^{\frac{5}{2}}}{16} \right)^{-1} < 0.0074,$$

及

$$1 - \frac{1}{\Pi_1} \left(S_1^{(3)} + \frac{1}{\Pi_2} \Phi_2 + \Phi \right) < 1.016.$$

由 m 的定义可知 $\Pi_1 \cdots \Pi_m$ 等于

$$\prod_{3 < p \leqslant x^{\frac{1}{10}}} \left(1 - \frac{2}{p} \right) = 100 \frac{e^A}{\log^2 x} + O\left(\frac{1}{\log^3 x} \right).$$

对于充分小的 ε，R 可以估计如下：

$$R < A_2 x^{\frac{2}{10}} x^{\frac{2}{10\beta}} x^{\frac{2}{10\beta^h}} \cdots = A_2 x^{\frac{1}{5} \cdot \left(1 + \frac{h}{\beta(h-1)}\right)}$$

$$< A_2 x^{0.9999} = O\left(\frac{x}{\log^3 x} \right).$$

所以

$$P_\omega \left(x, x^{\frac{1}{10}} \right) < 101.6 \frac{cx}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x} \right),$$

此处 c 为一个常数如引 1 所示。

引3. 命 u 与 v 为两个常数或依赖于x 的变 数， 且满足 $2 \leqslant u \leqslant v \leqslant A$，此处 A 为一个常数则

$$\sum_{x^{\frac{1}{v}} \leqslant p < x^{\frac{1}{u}}} \frac{1}{p\left(\log \frac{x}{p}\right)^{2}} = \frac{1}{\log^{2} x}$$

$$\left(\log \frac{v-1}{u-1} + \frac{u}{u-1} - \frac{v}{v-1}\right) + O\left(\frac{1}{\log^{4} x}\right).$$

证明类似于文〔3〕中的一条引理的证明。

2.现在考虑函数 $P_{\omega}\left(x, x^{\frac{1}{\alpha}}\right)(\alpha<10)$。显然当

$2 \leqslant \alpha \leqslant 10$ 时有

$$P_{\omega}\left(x, x^{\frac{1}{\alpha}}\right) \leqslant P_{\omega}\left(x, x^{\frac{1}{10}}\right), \tag{5}$$

$$P_{\omega}\left(x, x^{\frac{1}{\alpha}}\right) \geqslant 0. \tag{5a}$$

由引1与不等式（5）可知存在非递减函数$\lambda(\alpha)$，它是连续的或在区间 $2 \leqslant \alpha \leqslant 10$ 中仅有一个第一类不连续点，使

$$P_{\omega}\left(x, x^{\frac{1}{\alpha}}\right) > \lambda(\alpha) \frac{c x}{\log^{2} x} + O\left(\frac{x}{\log^{3} x}\right).$$

对于 ω 一致成立，此处 c 如引1与引2定义。

例如，λ（α）定义为

$\lambda(\alpha)=0$，当$2 \leqslant \alpha < 10$，

$\lambda(\alpha)=98$，当$\alpha=10$。

由引2与(5)可知在区间 $2 \leqslant \alpha \leqslant 10$ 中存在一个连续非递减函数 $\Lambda(\alpha)$使对于任何 ω 皆有

$$P_{\omega}\left(x, x^{\frac{1}{\alpha}}\right) < \Lambda(\alpha) \frac{c x}{\log^{2} x} + O\left(\frac{x}{\log^{3} x}\right).$$

作为例子，我们可以取

$$\Lambda(\alpha)=101.6,\qquad 当\ 2\leqslant\alpha\leqslant10.$$

我们用$\lambda_i(\alpha)$与$\Lambda_i(\alpha)$表示具有$\lambda(\alpha)$与$\Lambda(\alpha)$ 相类似性质的函数。

定理 1．假定$\lambda_i(\alpha)$与$\Lambda_k(\alpha)$为两个适合上述条件的函数．则由

$$\Psi(\alpha)=0,\qquad 当\ 2\leqslant\alpha\leqslant\tau,$$

$$\Psi(\alpha)=\lambda_i(\beta)-2\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\Lambda_k(z)\frac{z+1}{z^2}dz,$$

$$当\ 3\leqslant\tau\leqslant\alpha\leqslant10,$$

定义的函数$\Psi(\alpha)$，此处β为满足$\alpha\leqslant\beta\leqslant10$的任何数，亦是一个$\lambda$—函数，即$\Psi(\alpha)=\lambda_{i+1}(\alpha)$。

首先注意$P_\omega(x,p_{r+1})$与$P_\omega(x_1p_r)$ 之差为$\leqslant x$，属于数列

$$a_r,\quad a_r+p_r,\quad a_r+2p_r,\cdots$$
$$b_r,\quad b_r+p_r,\quad b_r+2p_r,\cdots$$

但不属于（1）中前$2r-1$个数列的整数个数，若

$a_r+kp_r=a_i+np_i$，则$k\equiv a'_i(\bmod p_i)i\geqslant1(0\leqslant k\leqslant\frac{x-a_r}{p_r}$，

$a'_i<p_i$)，及若$a_r+kp_r=b_i+np_i$，则$k\equiv b'_i(\bmod p_i)$，$i\geqslant1(b'<p_i)$。因此数列$a_r,a_r+p_r,a_r+2p_r,\cdots$中不属于（1）中前$2r-1$个数列又不超过$x$的整数个数等于不超过$\frac{x-a_r}{p_r}$的整数而又不含于数列

$$a'_i,\quad a'_i+p_i,\quad a'_i+2p_i,\cdots,\quad i=0,1,\cdots,r-1,$$
$$b'_i,\quad b'_i+p_i,\quad b'_i+2p_i,\cdots,\quad i=1,2,\cdots,r-1,$$

者的个数，即等于$P_{\omega'_r}\left(\frac{x-a_r}{p_r}, p_r\right)$，此处$\omega_r$表示整数$a'_r$与$b'_i$的集合。

类似地，含于数列$b_r, b_r+p_r, b_r+2p_r, \cdots$而不含于数列（1）的前$2r-1$个数列的不超过$x$的整数个数等于$P_{\omega''_r}\left(\frac{x-b_r}{p_r}, p_r\right) \cdot P_{\omega'_r}\left(\frac{x-a_r}{p_r}, p_r\right)$或者等于$P_{\omega'_r}\left(\frac{x}{p_r}, p_r\right)$，或者与它相差1，$P_{\omega''_r}\left(\frac{x-b_r}{p_r}, p_r\right)$与$P_{\omega''_r}\left(\frac{x}{p_r}, p_r\right)$的情况是类似的。

我们得

$$P_\omega(x, p_{r+1}) = P_\omega(x, p_r) - P_{\omega'_r}\left(\frac{x}{p_r}, p_r\right)$$

$$- P_{\omega''_r}\left(\frac{x}{p_r}, p_r\right) - \mu_r, \tag{6}$$

此处$0 \leqslant \mu_r \leqslant 2$。命$p_t, p_{t+1}, \cdots p_r$为$x^{1/\beta}$与$x^{1/\alpha}$之间的所有素数，即

$$x^{\frac{1}{\beta}} \leqslant p_t < p_{t+1} < \cdots < p_n < x^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant p_{r+1}.$$

则

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{\alpha}}) = P_\omega(x, p_{r+1})$$

与 $$P_\omega(x, x^{\frac{1}{\beta}}) = P_\omega(x, p_t).$$

不断地运用（6）可得

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{\alpha}}) = P_\omega(x, x^{\frac{1}{\beta}}) - \sum_{x^{\frac{1}{\beta}} \leqslant p_i < x^{\frac{1}{\alpha}}}$$

$$P_{\omega_i'}\left(\frac{x}{p_i},\ p_i\right)-\sum_{x^{\frac{1}{\beta}}\leqslant p_i<x^{\frac{1}{\alpha}}}$$

$$P_{\omega_i''}\left(\frac{x}{p_i},p_i\right)-\Sigma\mu_i, \qquad (7)$$

此处 $\Sigma\mu_i=O(\sqrt{x})$.

为了简单起见，今后我们略去指标 i。命

$$u_s=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}s-1(s=0,1,\cdots,n),$$

此处 $c_1\log x\leqslant n\leqslant c_2\log x$。对于给予满足 $x^{\frac{1}{u_{s+1}+1}}\leqslant p$

$<x^{\frac{1}{u_s+1}}$的素数 p，我们有

$$\alpha-1\leqslant u_s<\frac{\log\frac{x}{p}}{\log p}\leqslant u_{s+1}\leqslant\beta-1,$$

$$T_s=\sum_{x^{\frac{1}{u_{s+1}+1}}\leqslant p<x^{\frac{1}{u_s+1}}}\left(P_{\omega_i'}\left(\frac{x}{p},p\right)\right.$$

$$\left.+P_{\omega_i''}\left(\frac{x}{p},p\right)\right)=\sum_{x^{\frac{1}{u_{s+1}+1}}\leqslant p<x^{\frac{1}{u_s+1}}}$$

$$\left(p_{\omega_i}'\left(\frac{x}{p},\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{\log p}{\log\frac{x}{p}}}\right)+P_{\omega_i''}\right.$$

$$\left.\left(\frac{x}{p},\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{\log p}{\log\frac{x}{p}}}\right)\right)\leqslant 2c\sum_{x^{\frac{1}{u_{s+1}+1}}\leqslant p<x^{\frac{1}{u_s+1}}}$$

$$\frac{x}{p\log^2\frac{x}{p}}\Lambda_k\left(\frac{\log\frac{x}{p}}{\log p}\right)+O\left(\sum_{x^{\frac{1}{u_{s+1}+1}}\leqslant p\leqslant x^{\frac{1}{u_s+1}}}\right.$$

$$\left.\frac{x}{p\log^3\frac{x}{p}}\right),$$

及由引3得

$$T_s \leqslant 2cA_k(u_{s+1})\frac{x}{\log^2 x}\left(\log\frac{u_{s+1}}{u_s}+\frac{u_{s+1}-u_s}{u_s u_{s+1}}\right)+$$

$$+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\left(\log\frac{u_{s+1}}{u_s}+\frac{u_{s+1}-u_s}{u_s u_{s+1}}\right)\right),$$

因此

$$T=\sum_{x^{\frac{1}{\beta}}\leqslant p<x^{\frac{1}{\alpha}}}\left(P_{\omega_i'}\left(\frac{x}{p},p\right)+P_{\omega_i''}\left(\frac{x}{p},p\right)\right)$$

$$=\sum_{s=0}^{n-1}T_s\leqslant 2c\frac{x}{\log^2 x}\sum_{s=0}^{n-1}A_k(u_{s+1})\left(\log\frac{u_{s+1}}{u_s}\right.$$

$$\left.+\frac{u_{s+1}-u_s}{u_s u_{s+1}}\right)+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\sum_{s=0}^{n-1}\right.$$

$$\left.\left(\log\frac{u_{s+1}}{u_s}+\frac{u_{s+1}-u_s}{u_s u_{s+1}}\right)\right).$$

因

$$\sum_{s=0}^{n-1}A(u_{s+1})\left(\log\frac{u_{s+1}}{u_s}+\frac{u_{s+1}-u_s}{u_s u_{s+1}}\right)$$

$$=\int_{\alpha-1}^{\beta-1}A_k(z)\left(d\log z+\frac{dz}{z^2}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=\int_{\alpha-1}^{\beta-1}A_k(z)\frac{z+1}{z^2}dz+O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

及

$$\sum_{s=0}^{n-1}\left(\log\frac{u_{s+1}}{u_s}+\frac{u_{s+1}-u_s}{u_s u_{s+1}}\right)=O(1),$$

所以

$$T\leqslant 2c\frac{x}{\log^2 x}\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\Lambda_k(z)\frac{z+1}{z^2}dz+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right),$$

及由(7)得

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{\alpha}})\geqslant\frac{cx}{\log^2 x}\left(\lambda_i(\beta)-2\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\Lambda_k(z)\frac{z+1}{z^2}dz\right)+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right),$$

即

$$\lambda_{i+1}(\alpha)=\lambda_i(\beta)-2\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\Lambda_k(z)\frac{z+1}{z^2}dz.$$

定理证完.

定理 2.命$\lambda_i(\alpha)$与$\Lambda_k(\alpha)$为两个适合上述条件的函数.则由

$$\omega(\alpha)=\Lambda_k(\beta)-2\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\lambda_i(z)\frac{z+1}{z^2}dz\quad(3\leqslant\alpha\leqslant 10),$$

定义的函数$\omega(\alpha)$,此处β为满足$\alpha\leqslant\beta\leqslant 10$的任何数, 亦是一个$\Lambda$—函数, 即$\omega(\alpha)=\Lambda_{i+1}(\alpha)$.

定理的证明与定理 1 的证明是完全类似的.

命$\beta\leqslant 10$.命$\Lambda_0(\alpha)$与$\Lambda_0(\alpha)$为区间$6\leqslant\alpha\leqslant\beta$中的两个函数满足

$\lambda_0(\alpha)=0$, 当$\alpha<\beta$,

$\lambda_0(\beta)$等于一个正常数,

及

$$\Lambda_0(\alpha)=\Lambda_0(\beta),\ \text{当}\,6\leqslant\alpha\leqslant\beta.$$

不断后用定理 1 与 2，由 $\lambda_0(\alpha)$ 与 $\Lambda_0(\alpha)$ 出发可得

$$\lambda_{i+1}(x)=\lambda_0(\beta)-2\int_{x-1}^{\beta-1}\Lambda_i(y)\frac{y+1}{y^2}2y,$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{i+1}(\beta-1)&=\Lambda_0(\beta)-2\int_{\beta-2}^{\beta-1}\lambda_{i+1}(x)\frac{x+1}{x^2}dx\\&=\Lambda_0(\beta)-2\lambda_0(\beta)\int_{\beta-2}^{\beta-1}\frac{x+1}{x^2}dx\\&\quad+4\Lambda_i(\beta-1)\int_{\beta-2}^{\beta-1}\int_{x-1}^{\beta-1}\frac{x+1}{x^2}\\&\quad\frac{y+1}{y^2}dxdy\quad(i=0,1\cdots),\end{aligned}$$

此处对于所有 i，$\Lambda_i(\beta)=\Lambda_0(\beta),\lambda_i(\beta)=\lambda_0(\beta)$，及当 $y<\beta-1$ 时，$\Lambda_i(y)=\Lambda_i(\beta-1)$。

当 $8\leqslant\beta\leqslant10$ 时，上面表达式中，$\Lambda_i(\beta-1)$的系数小于 1，因而经过逐步迭代后，我们得到 $\Lambda(\beta-1)$，它非常接近于对应方程的根，即我们得到一个Λ—函数 $\overline{\Lambda}_0(\alpha)$：

$$\overline{\Lambda}_0(\alpha)=\overline{\Lambda}_0(\beta-1)$$
$$=\frac{\Lambda_0(\beta)-2\lambda_0(\beta)\int_{\beta-2}^{\beta-1}\frac{x+1}{x^2}dx}{1-4\int_{\beta-2}^{\beta-1}\int_{x-1}^{\beta-1}\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{y+1}{y^2}dxdy}+\varepsilon,$$

此处 $7\leqslant\alpha\leqslant\beta-1$ 及 ε 充分小。

现在，我们得到一个新的 λ 函数$\overline{\lambda}_0(\alpha)$：

$$\overline{\overline{\lambda}}_{\circ}(\beta-1)=\lambda_{\circ}(\beta)\quad 2\int_{\beta-2}^{\beta-1}\overline{\Lambda}_{\circ}(x)\frac{x+1}{x^2}dx-\varepsilon$$

$$=\lambda_{\circ}(\beta)-\overline{\Lambda}_{\circ}(\beta-\ )\int_{\beta-2}^{\beta-1}\frac{x+1}{x^2}dx-\varepsilon_1,$$

当 $\alpha<\beta-1$ 时 $\overline{\overline{\lambda}}_{\circ}(\alpha)=0$.

用类似的方法，由 $\overline{\lambda}_{\circ}$ 与 $\overline{\Lambda}_{\circ}$ 可得 $\overline{\overline{\lambda}}_{\circ}$ 与 $\overline{\overline{\Lambda}}_{\circ}$，等等. 从 $\lambda_{\circ}(10)=98$ 与 $\Lambda_{\circ}(10)=101.6$ 出发，迭代结果如下：

$$\overline{\Lambda}_{\circ}(9)=\frac{101.6-2\cdot 93\int_8^9\frac{x+1}{x^2}dx}{1-4\int_8^9\int_{x-1}^9\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{y+1}{y^2}dxdy}$$

$$+\varepsilon=85.1,$$

$$\overline{\overline{\lambda}}_{\circ}(9)=98-2\cdot 85.1\int_8^9\frac{x+1}{x^2}dx-\varepsilon_1=75.58,$$

$$\overline{\overline{\Lambda}}_{\circ}(8)=\frac{85.1-2\cdot 75.58\int_7^8\frac{x^2+1}{x^2}dx}{1-4\int_7^8\int_{x-1}^8\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{y+1}{y^2}dxdy}+\varepsilon'$$

$$=72.86,$$

$$\overline{\lambda}_{\circ}(8)=75.58-2\cdot 72.83\int_7^8\frac{x+1}{x^2}dx-\varepsilon_1''$$

$$=53.51,$$

$$\overline{\overline{\Lambda}}_{\circ}(7)=\frac{72.86-2\cdot 53.51\int_6^7\frac{x+1}{x^2}dx}{1-4\int_6^7\int_{x-1}^7\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{y+1}{y^2}dxdy}+\varepsilon$$

$$=67.58,$$

及最后得

$$\lambda(6)=\bar{\lambda}_{0}(8)-2\bar{\Lambda}_{0}(7)\int_{5}^{7}\frac{x+1}{x^{2}}dx-\varepsilon_{1}''=0.03,$$

即

$$P_{\omega}\left(x,\ x^{\frac{1}{6}}\right)<0.03\frac{cx}{\log^{2}x}+O\left(\frac{x}{\log^{3}x}\right),\tag{8}$$

与

$$P_{\omega}\left(x,x^{\frac{1}{6}}\right)\leqslant P_{\omega}\left(x,x^{\frac{1}{7}}\right)<67.58\frac{cx}{\log^{2}x}+O\left(\frac{x}{\log^{3}x}\right)$$

对于 ω 一致成立。

特别地，若我们取 $a_i=0$ 及 $b_i=p_i-2$，则 $P_{\omega}(x,x^{\frac{1}{6}})$ 等于满足 $n\leqslant x$ 及 n 与 $n+2$ 均不能被 $\leqslant x^{1/6}$ 的素数整除的整数 n 的个数；即存在一组整数 n 与 $n+2$，其素因子个数皆不超过 5。

不等式(8)表示这种数对有无穷多个，也就是说，我们证明了下面的结果：

存在无穷多个数对，每个数对中的整数皆最多只有 5 个素因子，每个数对包有的两整数之差为 2。

假定x为一个偶数，$a_i=0$ 及 b_i为x模p_i之最小非负剩余，则当 $p_i|x$ 时有 $a_i=b_i$。在 $P_{\omega}(x,x^{1/\alpha})$ 的所有估计之中，$\frac{x}{\log^{2}x}$ 需换成$\frac{x}{\log^{2}x}v(x)$，此处 $v(x)=\prod\limits_{\substack{p|x\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}$。因为当 $x^{\frac{1}{10}}\leqslant p<x^{1/2}$ 时有 $v\left(\frac{x}{p}\right)=v(x)\frac{p-2}{p-1}$

$= v(x)\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt[10]{x}}\right)\right)$. 对应于定理 1 与 2 的结果仍成立，故得

存在常数 A_0 使每一大于 A_0 的偶数皆可以表为两个素因子个数皆不超过 5 的整数之和.

关于区间[2, x]中孪生素数对的个数 $Z(x)$，我们有

$$Z(x)<28.2\frac{x}{\log^2 x},$$

此处 $x>x_0$，在此我们用到 $c=\frac{e^{\gamma}}{2}<0.417$.

参 考 文 献

〔1〕 V. Brun, Skr. Norske Vid.—Akad. Kristianaia, I, No.3, 1920.

〔2〕 H. Rademacher, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 3, 1924, 12—30.

〔3〕 A. A. Buchstab, Mat. Sbornik, 44, 1937, 1239—1246.

8. 关于多项式的素因子

孔 恩

我们用小写拉丁字母表示自然数，或简称为数，用 p, q, s, t 表示素数、命

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,\ a_0>0 \qquad (1)$$

为一个整值及原多项式，它是 $r(1\leqslant r\leqslant n)$个整值，既约原多

项式之积。假定(1)的固定素因子为 $T=t_1^{b_1}\cdots t_e^{b_e}$

我们将寻求尽可能小的整数 k 使数列

$$P_n(1), P_n(2), \cdots, P_n(x), \cdots \qquad (2)$$

中存在无限多个数，除固定素因子 t_i 外，最多含有 k 个素因子。

拉代马海尔〔1〕与黎切〔2〕用布朗筛法处理了这个问题。他们仅对于 $r=1$ 时，找到了一个较小的 k。对于 $1<r\leqslant n$，我们亦需寻求出对应的数 k。本文将给出 $r=n$ 时的证明。

假定 p 过所有适合

$$p\leqslant x^{\frac{1}{\nu}},\quad p\neq t_i \qquad (3)$$

的素数，此处 ν 为 n 的函数，将于以后确定，

命 d 为适合 $d\not\equiv 0(\bmod\ p)$及$d\not\equiv 0(\bmod\ t_i)$的整数。命 $N_n(dx, x^{\frac{1}{\nu}})$为(2)中适合下面条件的整数个数：$\leqslant P_n(x)$，$\equiv 0(\bmod\ d)$，$\not\equiv 0(\bmod\ p)$，及$\not\equiv 0(\bmod\ t_i^{b_i+1})$.用布朗方法可知当 $r=n$ 及 $x\to\infty$ 时有

$$N_n(x, x^{\frac{1}{\nu}}) > C_n\cdot 0.98 x\nu^{n}\log^{-n}x + O\left(x^{\frac{\chi(n)}{\nu}\nu+1}\log^{-n-1}x\right),$$

$$N_n(dx, x^{\frac{1}{\nu}}) < C_n\cdot 1.016\frac{nx}{d}\nu_n\log^{-n}x + O\left(x^{\frac{\chi(n)}{\nu}\nu+1}\log^{-n-1}x\right),$$

$$\chi(2)\geqslant 9.99, \chi(3)\geqslant 13.67, \chi(4)\geqslant 17.50, \chi(5)\geqslant 22.02, \cdots \qquad (4)$$

此处 C_n 为一个依赖于 $P_n(x)$的常数。

定理．若 $r=n$，则取 $k=\omega+n$ 即足， 此处 ω 为满足下式的最小整数

$$\frac{0.98}{1.016}(\omega+1)>n\log\chi(n). \tag{5}$$

例如，$n=2,k=6;n=3,k=10;n=4,k=15;n=5,k=21;$ …。

假定在(3)中取 $\nu=2\chi(n)$ 及 q 过满足

$$x^{\frac{1}{\nu}}<q\leqslant(2a_0x)^{\frac{1}{\nu}}+1,\quad q\neq t_i \tag{6}$$

的所有素数，命 m 表示(2)中适合

$$m\leqslant P_n(x),m\not\equiv 0(\bmod p),m\not\equiv 0(\bmod t_i^{\cdots+1}),$$
$$m\not\equiv 0(\bmod q^2) \tag{7}$$

的数．命 U 表示整数 m 的个数 $M_n(x,x^{\frac{1}{\nu}})$ 的下界估计．由于 $M_n(x,x^{\frac{1}{\nu}})=N_n(x,x^{\frac{1}{\nu}})+O(x^{1-\frac{1}{\nu}})$，所以由(4)可知

$$U=C_n\cdot 0.98x\nu^n\log^{-n}x+O(x^{\frac{1}{2}}\log^{\cdots 1}x)+O(x^{1-\frac{1}{\nu}}). \tag{8}$$

命 $M_n(qx,x^{\frac{1}{\nu}})$ 表示适合)$m\equiv 0(\bmod q)$的数 m 的个数．命 V 表示 $\sum_q M_n(qx,x^{\frac{1}{\nu}})=L_n$ 的上界估计，此处 q 过(6)．则 $L_n\leqslant\sum_q N_n(qx,x^{\frac{1}{\nu}})$，所以由(4)可知

$$V=C_n\cdot 1.016\sum_q\frac{nx}{q}\nu^n\log^{-n}x+O(x\log^{\cdots -1}x). \tag{9}$$

若 m 最少有 $\omega+1$ 个素因子 q，则它在 L_n 中至少被计算过

$\omega+1$ 次，所以表达式 $\triangle=U-\frac{1}{\omega+1}V$ 给出适合下面条件的

m 的个数的下界估计：除 t_i 之外，m 最多只有 ω 个素因子 q，m 的其他素因 s 皆大于 $(2a_0x)^{1/2}+1$。因 $P_n(x)$ 的每个线性因子，当 $x\to\infty$ 时，最多只有一个素因子 s，所以这种素因子 s 的个数最多为 n。因此若

$$\frac{0.98}{1.016}(\omega+1)>\sum\frac{n}{q},\tag{10}$$

则当 $x\to\infty$ 时有 $\triangle\to\infty$。因 $\sum_q\frac{1}{q}\sim\log\chi(n)$，所以定理得证。

参 考 文 献

〔1〕H.Rademacher, Abh.Math.Sem. Univ. Hamburg, 2—30. 3,1924,

〔2〕G.Ricci, I, Ann.Scuola Norm.SuP.Pisa, (2)6,1937, 1—90. II, ibid.91—116.

〔3〕P.Kuhn, Den Skand. 12—th Mat. Kongr; Lund, 1953, 160—168.(See Prod. Intern. Cong. Math; Amsterdam, 2, 1954, 35—37)

编者注：命 N 为一个偶数，命 $P_2(x)=x(N-x)(x=1,2,\cdots,N-1)$. 则由同样的方法可以证明 (a,b)，此处 $a+b\leqslant6$.

9. 一个素数论中的初等方法

赛　尔　贝　格

下面我们概要描述一个初等方法，它可以用于由布朗发展的“筛法”所能处理的同样问题。

假定我们给出总数为 N 的数列 a。命 N_z 表示不能被$\leqslant z$ 的素数整除的数 a 的个数[1]。我们将研究寻求 N_z 的上界估计问题。

当 $1\leqslant\nu\leqslant z$ 时，我们定义整数列 λ_ν 满足 $\lambda_1=1$ 而其他 λ_ν 为任意实数，则得

$$N_z\leqslant\sum_a\Big\{\sum_{\nu\mid a}\lambda_\nu\Big\}^2=\sum_{\nu_1,\nu_2\leqslant z}\lambda_{\nu_1}\lambda_{\nu_2}\sum_{\frac{\nu_1\nu_2}{\chi}\mid a}1,$$

此处 χ 表示 ν_1 与 ν_2 的最大公因子。

我们假定当 ρ 为一个正整数时，可以有一个能被 ρ 整除的 a 个数满足的渐近公式

$$\sum_{\rho\mid a}1=\frac{1}{f(\rho)}N+R_\rho,$$

此处 R_ρ 表示余项。我们进一步假定 $f(\rho)$是可积的，即当 ρ_1 与 ρ_2 互素时有 $f(\rho_1\rho_2)=f(\rho_1)f(\rho_2)$。因 $\frac{1}{f(\rho)}$ 表示能被 ρ 整数的 a 的“概率”，所以后面的假定表示当$(\rho_1,\ \rho_2)$

1）我们可以用 $a\neq r_p$ 来代替 $a\not\equiv 0(\bmod p)$，此处 $p\leqslant z$ 及 r_p 为仅依赖于 p 的整数。

$=1$时，“事件”$p_1|a$ 与“事件”$\rho_2|a$ 是独立的，在这种情况下，我们有

$$\sum_{\frac{\nu_1\nu_2}{\chi}\mid l} 1=\frac{1}{f\left(\frac{\nu_1\nu_2}{\chi}\right)}N+R_{\frac{\nu_1\nu_2}{\chi}}=\frac{f(\chi)}{f(\nu_1)f(\nu_2)}N$$

$$+R_{\frac{\nu_1\nu_2}{\chi}}.$$

将这个式子代入关于 N_z 的不等式可得

$$(1)\quad N_z\leqslant N\sum_{\nu_1,\nu_2\leqslant z}\frac{\lambda_{\nu_1}}{f(\nu_1)}\cdot\frac{\lambda_{\nu_2}}{f(\nu_2)}f(\chi)$$

$$+\sum_{\nu_1,\nu_2\leqslant z}\lambda_{\nu_1}\lambda_{\nu_2}R_{\frac{\nu_1\nu_2}{\chi}},$$

记

$$Q(\lambda)=\sum_{\nu_1,\nu_2}\frac{\lambda_{\nu_1}}{f(\nu_1)}\cdot\frac{\lambda_{\nu_2}}{f(\nu_2)}f(\chi),$$

我们将决定 $\lambda_\nu(2\leqslant\nu\leqslant z)$使 Q 达到极小。当 ρ 为整数时，我们记

$$f_1(\rho)=\sum_{d/\rho}\mu(d)f\left(\frac{\rho}{d}\right).$$

此处 $\mu(d)$表示麦比乌斯函数， 特别当 q 为无平方因子数时有

$$f_1(p)=f(\rho)\prod_{p/\rho}\left(1-\frac{1}{f(p)}\right).$$

由一个熟知的公式，我们得

$$f(\chi)=\sum_{\rho/\chi}f_1(\rho)=\sum_{\substack{\rho/\nu_1\\ \rho/\nu_2}}f_1(\rho),$$

代入表达式 Q，则得

$$Q=\sum_{\rho\leqslant z}f_1(\rho)\left\{\sum_{\substack{\rho|\nu\\ \nu\leqslant z}}\frac{\lambda_\nu}{f(\nu)}\right\}^2.$$

当 $1\leqslant\rho\leqslant z$ 时，记

$$y_\rho=\sum_{\substack{\rho|\nu\\ \nu\leqslant z}}\frac{\lambda\nu}{f(\nu)},$$

则得

$$\frac{\lambda\nu}{f(\nu)}=\sum_{\rho\leqslant\frac{z}{\nu}}\mu(\rho)y_{\rho\nu}.$$

现在我们在条件

$$\sum_{\rho\leqslant z}\mu(\rho)y_\rho=\frac{\lambda_1}{f(1)}=1$$

之下来决定二次型

$$Q=\sum_{\rho\leqslant z}f_1(\rho)y_\rho^2.$$

的极小，易知 y_ρ 取

$$y_\rho=\frac{\mu(\rho)}{f_1(\rho)}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{\rho'\leqslant z}\frac{\mu^2(\rho')}{f_2(\rho')}},$$

时，Q 有极小值

$$\frac{1}{\sum\limits_{\rho\leqslant z}\frac{\mu^2(\rho)}{f_1(\rho)}}.$$

对于对应的值 λ_ν，当 $1\leqslant\nu\leqslant z$ 时，我们有

$$\lambda_\nu=\frac{f(\nu)}{\sum\limits_{\rho\leqslant z}\frac{\mu^2(\rho)}{f_1(\rho)}}\cdot\sum_{\rho\leqslant\frac{z}{\nu}}\frac{\mu(\rho)\mu(\rho\nu)}{f_1(\rho\nu)}\tag{2}$$

$$= \mu(\nu)\prod_{p/\nu}\left(1-\frac{1}{f(p)}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\sum_{\rho\leqslant z}\frac{\mu^2(\rho)}{f_1(\rho)}}$$

$$\cdot\sum_{\substack{\rho\leqslant\nu\\(\rho\cdot\nu)=1}}\frac{\mu^2(\rho)}{f_1(\rho)}.$$

将这些 λ 的值代入(1)则得

$$(3)\qquad N_z\leqslant\frac{N}{\sum_{\rho\leqslant z}\frac{\mu^2(\rho)}{f_1(\rho)}}+\sum_{\nu_1\ \nu_2\leqslant z}\left|\lambda_{\nu_1}\lambda_{\nu_2}R_{\frac{\nu_1\nu_2}{\chi}}\right|.$$

因此若当右端第二项不太大时，可得 N_z 的上界。

将这个方法用于数 $a=n(n+2)$，$1\leqslant n\leqslant x$。取 $z=x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$，此处 ε 为一个充分小的正数，则得不超过 x 的孪生素数个数小于

$$\frac{10.6x}{\log^2 x},\quad x\geqslant x_0.$$

这比用布朗方法得到的最佳上界更好。

基于同样原则，我亦发展了一个处理这个问题下界的方法。关于这些方法的详细叙述及其在若干问题上的应用，将于以后发表。

10. 表大偶数为两个殆素数*之和

王　　元

为简单记，我们将下面的命题记为(a,b)：

每一充分大的偶数可表为两个大于 1 的整数 c_1 与 c_2 之

和，c_1 与c_2 的素因子个数分别不超过 a与b 。

本文的目的在于用作者过去所用的方法[1,2]，将作者1955年的结果(3,4)[3] 改进为(3,3)及$(a,b)(a+b\leqslant 5)$。并进一步运用 Бухштаб[4] 方法及比较复杂的数值计算，我们证明了(2,3)。最近，我们发现 А.И.Виноградов[5] 关于(3,3)的证明中某些数值计算的错误，将在文章末指出。

本文以 p 表示素数，p_i表示第 i 个奇素数。

给出偶数 x 及实数 ξ。给出一组整数

$$(\omega)\quad a;\quad a_i,\quad b_i\quad (1\leqslant i\leqslant r)$$

适合下面的条件

(1) $a=0$ 或 1，$0\leqslant a_i, b_i<p_i$，若 $p_i|x$，则 $a_i=b_i$，否则 $a_i\neq b_i (1\leqslant i\leqslant_i)$，

此处 $p_r\leqslant\xi<p_{r+1}$ 。命$P_\omega(x,\xi)$表示适合下面条件的 n 的个数；

(2) $1\leqslant n\leqslant x$，$n\equiv a\pmod 2$，$n\equiv a_i(\bmod pi)$，$n\equiv b_i(\bmod pi)\ (1\leqslant i\leqslant r)$ 。

给出两数$v>u>1$。以N表示适合下面条件的整数$n(x-n)$ 的集合；

(3) $1\leqslant n\leqslant x, n(x-n)\not\equiv 0(\bmod 2), n(x-n)\not\equiv 0(\bmod p_i)\ (1\leqslant i\leqslant s)$，

此处 $p_s\leqslant x^{\frac{1}{v}}<p_{s+1}$。以$M$表示适合(3)式再加上下面的条件的整数 $n(x-n)$的集合；

(4) $n(x-n)\equiv 0(\bmod p^2_{+j})\quad(1\leqslant j\leqslant t-s)$，

此处 $p_t\leqslant x^{\frac{1}{u}}<p_{t+1}$。集合$N$及$M$的元素的个数[1]分别记之以 $N(x,x^{\frac{1}{v}})$与$M(x,x^{\frac{1}{v}},x^{\frac{1}{u}})$。

引1. $M(x,x^{\frac{1}{v}},x^{\frac{1}{u}})=N(x,x^{\frac{1}{v}})+O(x^{1-\frac{1}{v}})+O(x^{\frac{1}{u}})$。

证：$N(x,x^{\frac{1}{v}})-M(x,x^{\frac{1}{v}},x^{\frac{1}{u}})\leqslant \sum\limits_{x^{\frac{1}{v}}<p\leqslant x^{\frac{1}{u}}}$

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ n(x-n)\equiv 0 (\bmod p)}} 1=\sum_{x^{\frac{1}{v}}<p\leqslant x^{\frac{1}{u}}} S_p.$$

$$(\text{i})\ p|x: S_p\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ n\equiv 0 (\bmod p)}} 1\leqslant\left[\frac{x}{p}\right]+1=O(x^{1-\frac{1}{v}}).$$

$$(\text{ii})\ p|x: S_p=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ n(x-n)\equiv 0 (\bmod p^2)}} 1\leqslant 2\left[\frac{x}{p^2}\right]+2.$$

故得

$$\sum_{x^{\frac{1}{v}}<p\leqslant x^{\frac{1}{u}}} S_p=O\left(\sum_{1<p\leqslant x^{\frac{1}{v}}} x^{1-\frac{1}{v}}\right)+O\left(\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{v}}}\frac{x}{m^2}\right)$$

$$+O\left(\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{u}}} 1\right)=O(x^{1-\frac{1}{v}})$$

$$+O(x^{\frac{1}{u}}).$$

引理证完

引2. 存在适合(1)之诸整数列$(\omega_j)(1\leqslant j\leqslant t-s)$，使$M$中至少被$l$个$p_{s+j}$整除的$n(x-n)$的个数不超过

---

* 殆素数者即素因子个数不超过某一确定限之整数。

1） 若$n=x-n$而$n(x-n)\in N$（或M），则规定$n(x-n')$与$(x-n')[x-(x-n')]$与各算一次。

$$\frac{2}{l}\sum_{\substack{1\leqslant j_1<\cdots<j_l\leqslant t-s\\ p_{s+j_1}\cdots p_{s+j_l}\nmid x}} P_{\omega_j}\left(\frac{x}{p_{s+j_1}\cdots}, x^{\frac{1}{v}}\right)+O(x^{1-\frac{1}{v}}).$$

证：当 $1\leqslant j\leqslant t-s$ 时，M中能被 p_{s+j} 整除的元素的集合记之以 Γ_j。实际上，Γ_j 就是适合(3)，(4)及下面条件的整数 $n(x-n)$的集合

(5)　$n(x-n)\equiv 0(\mathrm{mod}\, p_{s+j})$。

(i)$p_{s+j}|x$：Γ_j的元素的个数显然不超过

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ n\equiv 0(\mathrm{mod}\, p_{s+j})}} 1 = O(x^{1-\frac{1}{v}}).$$

(ii)$p_{s+j}\nmid x$：由条件(5)得出 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\, p_{s+j})$或 $n\equiv x$ $(\mathrm{mod}\, p_{s+j})$。命

(ω_j) $a=1$；当 $p_i|x$ 时，$a_i=b_i=0$，否则 $a_i=0, b_i p_{s+j}\equiv x$ $(\mathrm{mod}\, p_i)$，$(1\leqslant i\leqslant s)$。

显然，Γ_j 的元素的个数不超过 $2P_{\omega_j}\left(\frac{x}{p_{s+j}}, x^{\frac{1}{v}}\right)$。

若 $n(x-n)\in M$且至少被 l 个 p_{s+j}整除，则$n(x-n)$至少属于 l 个类 Γ_j。故得引理。

引 3. 命 $c>1$ 为一常数。则存在非负递增且仅有有限多个不连续点之函数 $\lambda(z)$及 $\Lambda(z)$($0<z\leqslant c$)使下式对(ω)与 z 一致成立。

(6)　$$\lambda(z)\frac{c_x x}{\log^2 x}+O\left(\frac{c_x x}{\log^2 x\log\log x}\right)\leqslant P_\omega(x, x^{\frac{1}{z}})$$

$$\leqslant \Lambda(z)\frac{c_x x}{\log^2 x}+$$

$$+O\left(\frac{c_x x}{\log^2 x\log\log x}\right)(0<z\leqslant c).$$

此处 $c_x=2e^{2\gamma}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$，而 γ 为 Euler 常数。

此引理可以立刻由 Brun 方法得出。

基本定理．命 $\lambda(z)$ 与 $\Lambda(z)$ $(0<z\leqslant c)$ 为具有引 3 所述之性质之两函数．命 $c>v>u>1$ 为两个给定之正数；m为非负整数．若

$$(7)\qquad \lambda(v)-\frac{1}{m+1}\int_{u-1}^{v-1}\Lambda\left(\frac{vz}{z+1}\right)\frac{z+1}{z^2}dz>0,$$

则当 x 充分大时，区间 $1<n<x-1$ 中存在 n 使 $n(x-n)$ 不能被$\leqslant x^{\frac{1}{v}}$的素数整除，最多被区间$x^{\frac{1}{v}}<p\leqslant x^{\frac{1}{u}}$中 m 个素整数除．

证：取

$(\bar{\omega})$ $a=1$；当 p_i/x 时，$a_i=b_i=0$，否则 $a_i=0$。$b_i\equiv x$ $(\bmod p_i)$，$i=1,2\cdots$。

则得 $N(x,x^{\frac{1}{u}})=p_{\bar{\omega}}(x,x^{\frac{1}{v}})$。由引 1，引2，引 3 可知当 x 充分大时，M中最多被 m个 $p_{s+1}(1\leqslant j\leqslant t-s)$ 整除的元素的个数不少于

$$M(x,x^{\frac{1}{v}},x^{\frac{1}{u}})-\frac{1}{m+1}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant t-s\\ p_{s+j}\nmid x}}$$

$$P_{\omega j}\left(\frac{x}{p_{s+j}},x^{\frac{1}{v}}\right)+O(x^{1-\nu})F_{\bar{\omega}}(x,x^{\frac{1}{j}})-\frac{1}{m+1}$$

$$\sum_{\substack{< j \leq t-s \\ p_{s+j} + x}} P_{\omega_j}\left(\frac{x}{p_{s+j}}, x^{\frac{1}{v}} \right) + O\left(x^{1-\frac{1}{}}\right) + O\left(x^{\frac{1}{u}}\right)$$

$$\geqslant \left(\lambda(v) - \frac{1}{m+1} \int_{v-1}^{-1} \Lambda\left(\frac{vz}{z+1} \right) \frac{z+1}{z^2} dz \right)$$

$$\frac{c_{\gamma} x}{\log^2 x} + O\left(\frac{c_{\gamma} x}{\log^2 x \log\log x} \right) > 3.$$

此即意为当 x 充分大时，区间 $1 < n < x-1$ 中存在 n 使 $n(x-n)$ 不能被 $\leqslant x^{\frac{1}{v}}$ 的素数整除，最多被区间 $x^{\frac{1}{v}} < p \leqslant x^{u}$ 中 m 个素数整除，明所欲证。

由 Brun-Бухштаб-*Selberg* 方法（参看[3]）可得下表(8)

α	…	8	…	6	…	5	…	4	…
$\Lambda(\alpha)$	…	68.52511	…	43.0082	…	34.89660	…	29.39023	…
$\lambda(\alpha)$	…	60.88817	…	26.70925	…	9.18109	…	0	…

由表(8)经计算得

$$\lambda(6) - \frac{2}{3} \int_{2}^{5} \Lambda\left(\frac{6z}{z+1} \right) \frac{z+1}{z^2} dz > 0.33829,$$

及

$$\lambda(8) - \frac{1}{2} \int_{1}^{7} \Lambda\left(\frac{8z}{z+1} \right) \frac{z+1}{z^2} dz > 0.56125.$$

故由基本定理得 $(3,3)$ 与 $(a,b)(a+b \leqslant 5)$。

进一步运用 Бухштаб 方法[4] 及比较复杂的数值计算，表(8)上的数值可以改善，得到下表(9)

α	⋯	8	⋯	7	⋯	6	⋯	5	⋯
$\Lambda(\alpha)$	⋯	64.403149	⋯	50.529826	⋯	41.01897	⋯	34.89666	⋯
$\lambda(\alpha)$	⋯	63.59931	⋯	47.471252	⋯	31.004145	⋯	13.61559	⋯

由表(9)得出

$$\lambda(8)-\frac{2}{3}\int_{\frac{9}{7}}^{7}\Lambda\left(\frac{8z}{z+1}\right)\frac{z+1}{z^2}dz>0.43.$$

故由基本定理得出(2,3)。

最后我们将要指出 А.И.Виноградов[5] 关于（3,3）证明中的某些错误*⁾．在此我们用他的记号不作任何解释，他得到

(10) $3.2I-2I_1<0.3167$,

故当 z 充分大时，

(11) $$\int_{1.1}^{\lambda}\varepsilon(u)(2u+1)du\leqslant\frac{e^{2}-1.1}{\pi}(3.2I-2I_1)+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log z}}\right)<0.5.$$

另一方面，由于 $\varepsilon(u)$ 是非负递减函数及 $1-\varepsilon(2)=(4.5-4\log 2)e^{-2}$，故得

(12) $$\int_{1.1}^{\lambda}\varepsilon(u)(2u+1)du\geqslant\int_{1.1}^{2}\varepsilon(u)(2u+1)du\geqslant\varepsilon(2)\int_{1.1}^{2}(2u+1)du>1.5.$$

此与(11)相矛盾。进一步，我们还能证明

$$(13)\qquad (4.1)^2-4\int_{1.55}^{\lambda}\frac{\varepsilon(u)}{1-\varepsilon(u)}(2u+1)\,du<16.81$$

$$-4\int_{1.55}^{3}\frac{\varepsilon(u)}{1-\varepsilon(u)}(2u+1)\,du<-1.$$

我们亦获得了关于孿生素数问题对应的结果。

参 考 文 献

〔1〕王元，1957.论篩法及其有关的若干问题，科学记录新辑1卷1期，9—11。

〔2〕王元，1957.论篩法及其若干应用，科学记录新辑1卷3期。1—4。

〔3〕王元，1956.表大偶数为一个不超过三个素数的乘积及一个不超过四个素数的乘积之和，数学学报，3，500—513。

〔4〕Бухшаб, А.А.1940.О Разложонии Чётных Чисел на Сумму Двух Слагаомых с ОгРаничонным Числом Мн-ожителей, ДАН СССР, 29, PP.544—548.

〔5〕ВиногРадов, А.И.1957.ПРименению ζ(s) к Решету ЭРатосфона, Mamem.сб, 41:1, PP.49—80.

---

*)我收到通知，他亦发现了该错并作了更正（见 Матом б.№41(83):3,415,1957）。作者于1957年9月6日。

三、表偶数为一个素数及一个殆素数之和

11、表偶数为一个素数及一个殆素数之和

瑞　尼

关于表偶数为两个素数之和及表奇数为三个素数之和的问题是1742年哥德巴赫与欧拉通信中提出来的。

在1937年，依．麦．维诺格拉朵夫院士[1]用他关于三角和的估计方法证明了关于奇数的哥德巴赫定理，在1938年，朱达科夫[2]应用维诺格拉朵夫方法证明了几乎所有偶数都是两个素数之和，其他类型的变体结果则是布朗[3]在1920年得到的，他用初等的埃拉朵斯染尼氏筛法证明了每个大偶数都可以表为两个殆素之数之和，即$2N=P_1+P_2$，此处P_1与P_2最多只有9[1)]个素因子。

一个条件结果是艾斯特曼[6]在1932年证明的．即每个大偶数是一个素数及一个素因子个数不超过6的殆素数之和。艾斯特曼的结果是基于假定所有狄里希勒L-级数著名的

1）9可以换成4，见塔尔塔科夫斯基〔4〕与布赫夕塔布〔5〕。

未被证明的黎曼猜想之下证明的，本文，不作任何假定，我们将证明

定理 1. 每个偶数都可以表示为 $2N=p+P$，此处 p 为一个素数而 P 为一个殆素数，即 P 最多只有 K 个素因子，此处 K 为一个绝对常数。

本文仅给出证明的主要步骤，详细证明将于另文发表。

黎曼猜想可以用关于 L-级数零点的一条新定理（定理2）来代替，这条定理是用林尼克的两个方法来证明的；即大筛法〔7〕与含于其文〔8〕中的方法。

为了叙述定理 2，我们引入某些定义。习知模 D 的 $\varphi(D)$ 个特征中的任何特征皆可以唯一地表成模 D 的素因子的特征之积，此处 D 是一个无平方因子数，因此若 $D=pq$，此处 p 为一个素数及 $(p, q)=1$，则模 D 的每一个特征皆可以表为形式 $\chi_D(n)=\chi_p(n)\chi_q(n)$，此处 $\chi_p(n)$ 与 $\chi_q(n)$ 分别表示模 p 与模 q 之特征。若 $\chi_p(n)$ 非主特征，则称 $\chi_D(n)$ 为关于 p 的原特征。显然，若关于 D 的每个素因子，$\chi_D(n)$ 都是原特征，它就是通常意义下的原特征。

定理 2. 命 q 为一个无平方因子数，$A\geqslant C_1$[1]，$k=\frac{\log q}{\log A}+1$ 及 $k\leqslant\log^3 A$。对于所有适合 $A<p\leqslant 2A$ 及 $(p,q)=1$ 的素数，最多除去不超过 $A^{3/4}$ 个这种素数，模 $D=pq$ 的 L-函数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\quad(s=\sigma+it).$$

---

1) $C_1, C_2, \cdots$ 均表示绝对常数。

此处 $\chi(n)$为关于 p 的原特征，在区域 $\sigma \geqslant 1-\frac{\delta}{k+1}$，$|t| \leqslant \log^3 D$ 中没有零点，其中 $\delta>0$ 为一个常数。

例如，由引 2 可以推出存在无穷多个素数 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$使当 $\chi(n)$非主特征模 p_n 时，当 $s=\sigma+it, \sigma \geqslant 1-\delta/2$，$|t|<\log^3 p_n$ 时有 $L(s,\chi) \neq 0$，此处 $\delta>0$ 为一个常数。

命

$$H(2N)=\sum_{\substack{p \leqslant 2N \\ (2N-p,\,B)=1}} \log p \cdot \exp\left(-p\frac{\log 2N}{2N}\right), \tag{1}$$

此处 $B=\prod\limits_{c_2<p \leqslant (2N)^{1/R}} p$ 及 R 为一个给定整数，命

$$P_Q(x)=\sum_{\substack{p<x \\ p \equiv l \pmod{Q}}} \log p \cdot \exp\left(-p\frac{\log x}{x}\right)$$

$$=\frac{x}{\varphi(Q)\log x}+R_Q(x), \tag{2}$$

此处 $(l, Q)=1$。则由布朗方法可知

$$H(2N)>\frac{C_3 N}{\log^2 N}-\sum_{Q \in E}|R_Q(2N)|, \tag{3}$$

此处集合E 的定义为：若 $c_2 \leqslant p_i \leqslant (2N)^{\frac{1}{R h^{[i/2]}}}$ $i=1,\cdots,r$，则 E 含有形如 $Q=p_1 p_2 \cdots p_r$ 的无平方因子数，其中 $h=1.25$。

如果我们能够证明当 $N \geqslant c_4$ 时有 $H(2N)>0$，则定理

1 对于 $K=\max(R+c_2, c_4)$ 成立、因此问题归结为估计

$$\sum_{Q>E}|R_Q(2N)|. \tag{4}$$

我们将证明

$$\sum_{Q>E}|R_Q(2N)|<\frac{4N}{\log^3 N}. \tag{5}$$

为了估计(4)，我们由定理 2 来推出定理 3。

定理 3. 命 q_1 是一个无平方因子整数，$A\geqslant c_1$ 及

$$\exp((\log x)^{2/5})<Aq_1<\sqrt{x}.$$

命 $k_1=\log q_1\Big/\log\dfrac{p_1}{2}+1$，此处 p_1 为素数，$A\leqslant p_1<2A$ 及 $(p_1,q_1)=1$。假定 $k_1\leqslant\log^3 A$。则最多除去 $A^{3/4}$ 个素数，对于所有素数 p_1 皆有

$$\left|\sum_{p\leqslant x}\chi(p)\log p\cdot\exp\left(-p\frac{\log x}{x}\right)\right|$$

$$\leqslant x^{1-\frac{\delta_1}{k_1+1}}. \tag{6}$$

此处 $\chi(n)$ 为模 p_1q_1 的特征，它关于 p_1 为原特征，及 $\delta_1>0$ 为一个常数。

容易由定理 2 及熟知的李特伍德公式(见〔8〕)推出

$$\sum_1^{\infty}\Lambda(n)\chi(n)e^{-\frac{n}{Y}}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{L'}{L}(s,\chi)\Gamma(s)Y^s ds. \tag{7}$$

从熟知的梯其玛奇〔9〕，帕奇〔10〕与西革尔〔11〕的结果可知

$$P_D(x)=\frac{x}{\varphi(D)\log x}$$

$$+O\left(x\exp(-c_6\sqrt{\log x})\right) \tag{8}$$

对于所有 $D\leqslant\exp(c_6\sqrt{\log x})$成立，最多除掉某整数$D_1$[1]的倍数的$D$，$D_1$是可能存在的。

当 $D_1|D$ 时有

$$P_D(x)=\frac{x}{\varphi(D)\log x}+O\left(x\exp(-c_6\sqrt{\log x})\right)$$

$$+O\left(\frac{1}{\varphi(D)}\ x^{1-\frac{C_8}{D_1^{\,\varepsilon}}}\right), \tag{9}$$

此处 ε 为任意正数及 C_ε 仅依赖于 ε。进而言之，我们需要布朗梯其玛奇公式(见[9])：

$$P_D(x)=O\left(\frac{x}{\varphi(D)}\right) \tag{10}$$

对于 $D\leqslant\sqrt{x}$ 一致成立。

研究和(4)。命 $2N=x$ 及

$$S_\chi(x)=\sum_{p\leqslant x}\chi(p)\log p\cdot\exp\left(-p\frac{\log x}{x}\right). \tag{11}$$

若 $Q\geqslant\exp\left((\log x)^{2/5}\right)$及 $Q=p_1q_1$，此处p_1为 Q 的最大素因子及它不是定理 3 意义下被除去的一个，则由

$$P_Q(x)=\frac{1}{\varphi(Q)}\sum_{(\chi)}\bar{\chi}(l)S_\chi(x), \tag{12}$$

---

1) D_1为模，其对应的 L-级数在区域 $\sigma>1-c_7/\sqrt{\log x}$ 中有西革尔零点 $\rho=\sigma+it$。

可得

$$P_Q(x)=\frac{1}{\varphi(p_1)}Pq_1\ (x)\ +O\left(x^{1-\frac{\delta_1}{k_1+1}}\right). \quad (13)$$

这个手续可以对于 $q_1=p_2q_2$，$q_2=p_3q_3$ 等加以继续，直至经过一定步骤，例如 s 步，之后，定理 3 的条件对于 $q_s=p_{s+1}q_{s+1}$不成立.则若 $q_s<\exp(\log x)^{2/5}$，我们用(8)或(9)，而当 $q_s\geqslant\exp(\log x)^{2/5}$及$p_{s+1}$为一个被除去的素数，我们用(10)。则 (4) 的估计归结为下面四种项的和的估计：

Ⅰ. $x\exp(-c_6\sqrt{\log x})$. Ⅱ. $\frac{1}{\varphi(D)}x^{1-\frac{C_\varepsilon}{D_1^\varepsilon}}$.

Ⅲ. $\frac{x}{\varphi(D)}$. Ⅳ. $x^{1-\frac{\delta_1}{k_1}}$.

类型Ⅰ的项的和明显地有 $O(N/\log^4 N)$。

类型Ⅱ的项的和不超过

$$N\log^3 N\cdot\exp\left(-\log D_1-\frac{C_\varepsilon}{D_1^\varepsilon}\log N\right). \quad (14)$$

尽管 D_1 的值是未知的，但我们可以证明对于 $1\leqslant D_1<\infty$，$N\geqslant c_4$ 及 $\varepsilon={}^1/_8$，(14)的极大不超过 $N/\log^3 N$。

在估计类型Ⅲ的项的和时，需注意对于任何 q，在任何区间$(A, 2A)$中被除去的素数 p' 的个数不超过 $A^{3/4}$，所以

$$\sum_{p'\geq T}\frac{1}{p'-1}<\frac{\log^2 T}{T^{1/4}},\quad T\geqslant c_8. \quad (15)$$

最后，下述关于E 的初等性质对于类型Ⅳ的项的和的估计是需要的：整数 $Q=pq$ 的个数，此处 p 为 Q 的最大素因子，它属于E 并满足 $p<q^{1/k}$ (k 为整数$\geqslant 1$)，不超过 $(2N)^{40k/R\,h^{k,2}}$.

因此我们证明了，对于充分大的 R，当 $N>c_8$ 时，任何类型项的和均不超过 $N/\log^3 N$，即

$$\sum_{Q}\sum_{E}|R_Q(2N)|<\frac{4N}{\log^3 N},\quad N>c_8. \tag{16}$$

由(3)与(16)可知当 $N>c_4$ 时有 $H(2N)>c_9 N/\log^2 N$，故得定理1．方程 $2N=p+P$ 的解数不小于 $c_9 N/\log^3 N$．

很自然地希望能证明解数为 $O(N/\log^2 N)$．结果减弱的原因在于我们用和 $\Sigma\log p\cdot\exp\left(-p\frac{\log x}{x}\right)$ 代替 $\Sigma\log p$，从而使运用李特伍德公式时，定理2中无零点的矩形的长边可以减少．

类似于定理1，我们有

定理4．存在无限多个素数 p 使 $P=p+2$ 为一个殆素数，即 P 的素因子个数不超过一个绝对常数．

定理4给出著名孪生素数对有无穷多这一猜的一个迫近结果。

参考文献

〔1〕 I.M.Vinogradov,C.R.Acad.URSS,15,1937,291 294.

〔2〕 N.G.Tchudakov,Izv.Akad.Nauk.SSSR,Ser.Mat;1,1938,25—40.

〔3〕 V.Brun,Skr.NorskeVid.Akad;Kristiania,I,3,1920.

〔4〕 V.A.Tartakovskii,Dokl.Akad.Nauk SSSR,23,1939,126—129.

〔5〕 A.A.Buchstab,Dokl.Akad.Nauk SSSR,29,1940,544—548.

〔6〕 T. Estermann, J. Reine Angew. Math; 168, 1932, 106—116.
〔7〕 Ju. V. Linnik, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 30, 1914, 292—294.
〔8〕 Ju. V. Linnik, Mat. Sbornik, 15, 1944, 3—12.
〔9〕 E. C. Titchmarsh, Rend. Cir. Mat. Palermo; 54, 1930, 414—429.
〔10〕 A. Page, Proc. London Math. Soc; 39, 1935, 116—141.
〔11〕 C. L. Siegel, Acta Arith; 1, 1936, 83—86.

12 表大整数为一个素数及一个殆素数之和[1)]

王 元

§1

本文我们将给某些基于假定广义黎曼猜想成立之下获得的结果以详细的证明(见〔1〕,〔2〕)。首先,我们将广义黎曼猜叙于后:

(R)所有狄里希勒L-函数$L(s,\chi)$的零点的实部皆$\leqslant {}^1/_2$。

由(R)易推出〔2〕

(R^*) 命$(l,k)=1$。则

1) 本文以前曾在"数学学报"(见Vol. X, No. 2, pp. 168—181, 1960上发表;但附录是新加的。

$$\pi(x;k,l)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}}1=\frac{\mathrm{li}\,x}{\varphi(k)}+O(x^{\frac{1}{2}}\log x),$$

此处 $\mathrm{li}\,x=\int_2^x\frac{dt}{\log t}$.

现在将本文主要结果叙于下：

定理 1. 假定(R^*)成立，则每个大偶数都是一个素数及一个不超过 3 个素数的乘积之和。

定理 2. 假定 (R^*) 成立. 则存在无穷多个素数 p 使 $p+2k$ 最多为 3 个素数的乘积，此处 k 为一个给定的正整数。

定理 3. 假定 (R^*) 成立。则每个大奇数都可以表示为 $N=p+2P$，此处 p 为一个素数而P为一个素因子个数不超过3 的殆素数。

定理 4. 命 $Z_k(x)$为不超过 x，形为 $(p,p+2k)$的素数对的个数。则

$$Z_k(x)\leqslant 8\prod_{\substack{p\mid 2k\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\log^2 x}$$

$$+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right).$$

定理 1,2,3 改进了作者[4]与阿. 依. 维诺格拉朵夫[5]独立并同时得到的结果。在这些结果中将 3 换成 4 即得我们原来的结果。

若将$\pi(x;k,l)$换成

$$P(x;k,l)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}}e^{-\frac{p\log x}{x}}\log p,$$

则定理 1,2,3 可以由下面较弱的猜想(R^{**})推出来。

(R^{**}) 命 χ 为 $\bmod D$ 的一个特征。则 $L(s,\chi)$ 在区域

$$|t|\leqslant\log^3 D,\quad \sigma>\frac{1}{2}\ (s=\sigma+it).$$

中没有零点。

本文中，$p, p', p'', \cdots; p_1, p_2, \cdots$ 均表示素数。

§2

引1．若 $x\geqslant 1$ 及 $z\geqslant 1$，则

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant z\\(n,x)=1}}\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}=\frac{\varphi(x)}{x}\log z+O(\log\log 3x).$$

（见〔4〕）．

引2．命 $f(k)=\varphi(k)\prod_{p\mid k}\frac{p-2}{p-1}$．若 $1\leqslant z\leqslant x, 1\leqslant y\leqslant x$，

则

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant z\\(k,2y)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}=\frac{1}{2}\prod_{\substack{p\mid y\\p>2}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p>2}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)\log z+O(\log\log 3x).$$

证、命 $\psi(q)=\prod_{p\mid q}\frac{p-2}{p-1}$．则

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant z\\(k,2y)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}=\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant z\\(k,2y)=1}}\frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)}\prod_{p\mid k}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)$$

$$=\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant z\\(k,2y)=1}}\frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)}\sum_{q\mid k}\frac{1}{\psi(q)}$$

$$= \sum_{\substack{q\leqslant z\\(q,2y)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi(q)\psi(q)} \sum_{\substack{t\leqslant z/q\\(t,2qy)=1}} \frac{\mu^2(t)}{\varphi(t)}$$

$$= \sum_{\substack{q\leqslant z\\(q,2y)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi(q)\psi(q)}$$

$$\left[\frac{\varphi(2qy)}{2qy}\log\frac{z}{q}\right.$$

$$\left.+O(\log\log 6qy)\right]$$

$$=\frac{\varphi(2y)}{2y}\sum_{\substack{q\leqslant z\\(q,2y)=1}}\frac{\mu^2(q)}{q\psi(q)}\log z$$

$$+O(\log\log 3x)$$

$$=\frac{\varphi(2y)}{2y}\prod_{p\nmid 2y}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)\log z$$

$$+O(\log\log 3x)$$

$$=\frac{1}{2}\prod_{\substack{p/y\\p>2}}\frac{p-2}{p-1}$$

$$\prod_{p>2}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)\log z$$

$$+O(\log og 3x).$$

引理证完。

§3

命 $2\leqslant y\leqslant x$ 为两个整数．命

(ω) $\quad a,q;a_i \ (1\leqslant i\leqslant r)$

为一个适合下面条件的整数列：

(1) $q \leqslant x$, $(a,q)=1$; 若 $p_i | y$, 则 $a_i \equiv 0(\mathrm{mod}\, p_i)$,

否则 $a_i \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, p_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$,

此处 $2 < p_1 < \cdots < p_r \leqslant \xi$ 为所有不超过 ξ 而又除不尽 q 的素数.

命 $P_\omega(x,q,\xi)$为适合下面条件的素数 p 的个数:

(2) $p \leqslant x, p \equiv a(\mathrm{mod}\, q), p \equiv a_i(\mathrm{mod}\, p_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

则由孙子定理可知同余式组

$$y \equiv a_i(\mathrm{mod}\ p_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

在区间 $1 \leqslant y \leqslant p_1 \cdots p_2$ 中有唯一的解, 将这个解记为 a^*. 因此 $P_\omega(x,q,\xi)$等于适合下面条件的素数个数:

(3) $p \leqslant x, p \equiv a(\mathrm{mod}\ q), p \not\equiv a^*(\mathrm{mod}\ p_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

定理 A. 命 $c > o$ 及 $P = \prod_{i=1}^{r} p$. 则在(R^*)成立下, 估计式

$$P_\omega(x,q,\xi) \leqslant \frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(q) \sum\limits_{\substack{1 \leqslant k < \xi^c \\ k/P \\ (k,\ ) = 1}} \dfrac{\mu^2(k)}{f(k)}} + O(x^{1/2} \log x \cdot \xi^{2c} \log^2 \xi)$$

对于(ω)一致地成立, 此处 $f(k) = \varphi(k) \prod\limits_{p | k} \dfrac{p-2}{p-1}$.

证记 $g(k) = \varphi(k)^{-1}$. 若 $(k,y)=1$ 及 $k | P$, 则由(R^*)可知

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv a(\mathrm{mod}\ q) \\ p \equiv a^*(\mathrm{mod}\ k)}} 1 = \frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(q)\varphi(k)} + O(x^{1/2} \log x).$$

命

$$\lambda_d = \frac{\mu(d)}{f(d)g(d)} \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant \xi^c / d \\ (k, d) = 1 \\ k \mid P \\ (k, y) = 1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)} \Big/ \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant \xi^c \\ l \mid P \\ (l, y) = 1}} \frac{\mu^2(l)}{f(l)},$$

此处 $d \mid P$. 则

$$P_\omega(x, q, \xi) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv a \pmod q \\ (p - a^*, P) = 1}} 1 \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv a \pmod q}} \Big(\sum_{\substack{d \mid (p - a^*, P) \\ (d, y) = 1}} \lambda_d \Big)^2$$

$$= \sum_{\substack{d_1 \leqslant \xi^c \\ d_1 \mid P \\ (d_1, y) = 1}} \sum_{\substack{d_2 \leqslant \xi^c \\ d_2 \mid P \\ (d_2, y) = 1}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv a \pmod q \\ p \equiv a^* \left(\bmod \frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}\right)}} 1$$

$$= \frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(q)} \sum_{\substack{d_1 \leqslant \xi^c \\ d_1 \mid P \\ (d_1, y) = 1}} \sum_{\substack{d_2 \leqslant \xi^c \\ d_2 \mid P \\ (d_2, y) = 1}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} \frac{g(d_1) g(d_2)}{g((d_1, d_2))} + O\Big(x^{1/2} \log x \Big(\sum_{\substack{d \leqslant \xi^c \\ d \mid P}} |\lambda_d| \Big)^2 \Big) = \frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(q)} Q + R.$$

命

$$S=\sum_{\substack{l<\xi^c\\ l\mid P\\ (l,y)=1}}\frac{\mu^2(l)}{f(l)}.$$

则

$$\lambda_k g(k)=\frac{1}{S}\sum_{\substack{m<\xi^c/k\\ (m,k)=1\\ m\mid P\\ (m,y)=1}}\frac{\mu(k)}{f(k)}\cdot\frac{\mu^2(m)}{f(m)}$$

$$=\frac{1}{S}\sum_{\substack{m<\xi^c/k\\ (m,y)=(m,k)=1\\ m\mid P}}\frac{\mu(mk)\mu(m)}{f(mk)}.$$

当 $(d,y)=1$ 时有

$$\sum_{\substack{d\mid k\mid P\\ k<\xi^c\\ (k,y)=1}}\lambda_k g(k)=\frac{1}{S}\sum_{\substack{d\mid k\mid P\\ k<\xi^c\\ (k,y)=1}}\sum_{\substack{m<\xi^c/k\\ (m,y)=(m,k)=1\\ m\mid P}}\frac{\mu(mk)\mu(m)}{f(mk)}$$

$$=\frac{1}{S}\sum_{\substack{r<\xi^c\\ r\mid P\\ (r,y)=1}}\frac{\mu(r)}{f(r)}\sum_{d\mid k\mid r}\mu\left(\frac{r}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{S}\cdot\frac{\mu(d)}{f(d)}.$$

所以

$$Q=\sum_{\substack{d_1<\xi^c\\ d_1\mid P\\ (d_1,y)=1}}\sum_{\substack{d_2<\xi^c\\ d_2\mid P\\ (d_2,y)=1}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}g(d_1)g(d_2)$$

$$\sum_{d\mid(d_1,d_2)}f(d)=$$

$$=\sum_{\substack{d\leqslant\xi^c\\ d\mid P\\ (d,\,y)=1}} f(d)\Bigg(\sum_{\substack{k\leqslant\xi^c\\ d\mid k\mid P\\ (k,\,y)=1}}\lambda_k g(k)\Bigg)^2=\frac{1}{S}.$$

由麦尔顿定理可知当 $d\mid P$ 及 $d\leqslant\xi^c$ 时

$$|\lambda_d|\leqslant\frac{|\mu(d)|}{|f(d)g(d)|}\leqslant\prod_{p\mid d}\frac{p-1}{p-2}=O(\log\xi),$$

所以

$$R=O(x^{1/2}\log x\cdot\xi^{2c}\log^2\xi).$$

定理证完。

§4

命 $\xi>2$。命 $l<c\leqslant l+1$，此处 l 为一个正整数，则

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\xi^c\\ n\mid P\\ (n,\,y)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\xi^c\\ (n,\,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}$$

$$-\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\xi^c\\ (n,\,2qy)=1\\ p\mid n}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}$$

$$+\sum_{\substack{\xi<p'<p''\\ p'p''\leqslant\xi^c}}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ p'p''\mid n\\ (n,\,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}+\cdots+(-1)^l$$

$$\sum_{\substack{\xi<p'<\cdots<p^{(l)}\\ p'\cdots p^{(l)}\leqslant\xi^c}}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ p'\cdots p^{(l)}\mid n\\ (n,\,2qy)=1}}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}$$

$$=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\xi^c\\ (n,\,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}-\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^c\\ (p,\,qy)=1}}\frac{1}{f(p)}$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant \xi^c/p \\ (n,2pyq)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)}+\cdots+(-1)^l$$

(4)
$$\sum_{\substack{\xi<p'<\cdots<p^{(l)} \\ p'\cdots p^{(l)}\leqslant \xi^c \\ (p'\cdots p^{(l)},qy)=1}} \frac{1}{f(p')\cdots f(p^{(l)})}$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant \frac{\xi^c}{p'\cdots p^{(l)}} \\ (n,2p'\cdots p^{(l)}qy)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)}.$$

1°. 若 $3\leqslant u\leqslant 6$ 及 $x^{1/u}<q\leqslant c_0 x^{1/u}$，则我们取 $\xi=x^{1/u}/\log^{12}x$ 及 $c=\frac{u-2}{4}<1$. 由引 2 及(4)可知

$$\sum_{\substack{n\leqslant \xi^c \\ n\mid P \\ (n,b)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)}=\sum_{\substack{n\leqslant \xi^c \\ (n,2qb)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)}$$

$$=\frac{1}{2}\prod_{\substack{p\mid qy \\ p>2}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p>2}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)\log\xi^c$$

$$+O(\log\log^3 x)$$

$$=\frac{u-2}{8u}\prod_{\substack{p\mid qy \\ p>2}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p>2}\left(+1\frac{1}{p(p-2)}\right)\log x$$

$$+O(\log\log^3 x).$$

因此由定理 A 得

(5)
$$P_\omega(x,q,x^{1/u})\leqslant P_\omega\left(x,q,\frac{x^{1/u}}{\log^{12}x}\right)$$

$$\leqslant A(u)\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2 x}+O\left(\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)}\cdot\frac{\log\log x}{\log^3 x}\right),$$

此处

$$\Lambda(u)=\frac{8u}{u-2}e^{r},$$

(6)

$$c_{qy}=e^{-r}\prod_{\substack{p\mid qy\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right),$$

其中 r 表示欧拉常数。

2° 若 $6\leqslant u\leqslant 13$ 及 $x^{1/u}<q\leqslant c_0x^{1/u}$， 则我们取 $\xi=x^{1/u}/\log^{12}x$ 及 $c=\frac{u-2}{4}<3$。因为

$$\sum_{\substack{\xi>p\leqslant\xi^c\\ p\nmid qy}}\frac{1}{f(p)}-\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{1}{p}=O\left(\sum_{p>\xi}\frac{1}{p^2}\right)$$

$$+O\left(\sum_{\substack{p>\xi\\ p\mid py}}\frac{1}{p}\right)=O\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

$$\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^c\\ p\nmid qy}}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}$$

$$-\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^c\\ p\nmid qy}}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p\\ (n,2pqy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}$$

$$=O\left(\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^c\\ p\nmid qy}}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p\\ (n,2qy)=1\\ p\mid n}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}\right)$$

$$=O\left(\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^c\\ p\nmid qy}}\frac{1}{f(p)^2}\sum_{\substack{n<\xi^c/p^2\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}\right)$$

$$=O\left(\frac{\log x}{\xi}\right),$$

所以

$$\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{1}{p}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p\\(n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}$$

$$-\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^c\\p\nmid qy}}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p\\(n,2pqy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}$$

$$=O\left(\frac{\log x}{\xi}\right).$$

由引2及(4)可知

$$\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\n\mid r\\(n,y)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}\geqslant\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\(n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}$$

$$-\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{1}{p}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p\\(n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}+O\left(\frac{\log x}{\xi}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(2c-1-c\log c)\prod_{\substack{p\mid qy\\p>2}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\log\xi$$

$$+O(\log\log x).$$

因此由定理A可知(5)对于

$$\Lambda(u)=\frac{2u}{\frac{u-2}{2}-1-\frac{u-2}{4}\log\frac{u-2}{4}}e^{r}(6\leqslant u\leqslant13). \tag{7}$$

成立。

命U表示方程

$$\frac{u}{4}-2-\frac{1}{2}\log\frac{u-2}{4}=0$$

的根．则

$$\frac{d\Lambda(u)}{du}=\Lambda'(u)\begin{cases}>0, & \text{if } 13\geqslant u>U;\\<0, & \text{if } U>u\geqslant3.\end{cases}$$

因此$A(u)$在区间$(3, U)$中递减而在区间$(U, 13)$中递增，由数值计算可知

$$7.35<U<7.4.$$

§5

命 $v>4$.

1^0. 若 $q=x^{1/u}$ 及 $2<u\leqslant\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{v}}$，则我们取 $c=\dfrac{v}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{u}\right)\leqslant 1$ 及 $\xi=x^{1/u}/\log^{3/c}x$. 由于

$$\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ n\mid P\\ (n,y)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}=\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}$$

$$=\frac{u-2}{8u}\prod_{\substack{p\mid qy\\ p>2}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p>2}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)\log x$$

$$+O(\log\log x),$$

所以由定理A得

$$P_\omega(x,q,x^{1/v})\leqslant P_\omega(x,q,\xi)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{8u}{u-2}\prod_{\substack{p\mid qy\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\varphi(q)\log^2x}$$

$$+O\left(\frac{xc_{qy}\log\log x}{\log^3x}\right)=A_1(u)\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2x}\tag{8}$$

$$+O\left(\frac{xc_{qy}\log\log x}{\varphi(q)\log^3x}\right),$$

此处

(9) $$A_1(u)=\frac{8u}{u-2}e^{\gamma}.$$

2°。若 $q=x^{1/u}$ 及

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{2}{v}}<u<\begin{cases}\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{4}{v}} & (v>8);\\ \infty & (v\leqslant 8),\end{cases}$$

则我们取 $\xi=x^{1/u}/\log^3 x$ 及 $c=\frac{v}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)$. 由于

$$\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ n\mid P\\ (n,v)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}=\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ (n,2qv)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}$$

$$-\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{1}{p}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p\\ (n,2qv)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}+O\left(\frac{\log x}{\xi}\right)$$

$$=\frac{1}{2v}\left[v\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)-1-\frac{v}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)\log\right.$$

$$\left.\frac{v}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)\right]\times\prod_{\substack{p\mid qv\\ p>2}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\log x$$

$$+O(\log\log x),$$

所以由定理 A 可知(8)式仍成立，但

(10) $$A_1(u)=\frac{2ve^{\gamma}}{v\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)-1-\frac{v}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)\log\frac{v}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)}.$$

由于对于 $4<v<8$ 时有

$$\Lambda_1'(u)=\frac{d}{du}\Lambda_1(u)=\begin{cases}\dfrac{-16}{(u-2)^2}<0\ (\text{当}\ 0<c\leqslant 1),\\ -\dfrac{\dfrac{v^2}{u^2}(1-\log c)}{(2c-1-c\log c)^2}<0\\ (\text{当}\ 1<c\leqslant 2).\end{cases}$$

所以当 $u\leqslant\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{v}}$ 时，$\Lambda_1(u)$ 为一个递减函数。

§6

定理 B. 在 (R^*) 成立之下，估计式

$$P_\omega(x,q,x^{1/13})>25.8096e^{-\gamma}\prod_{\substack{p>2\\p\mid q}}\frac{p-1}{p-2}\cdot$$

$$\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\varphi(q)\log^2 x}+O\left(\frac{xc_{qy}}{\log^3 x}\right).$$

对于 (ω) 一致地成立，此处 q 是一个给定的整数，

引 3. 命 $r\geqslant r_1\geqslant\cdots\geqslant r_n\geqslant 1$ 为一个整数集合，则在 (R^*) 成立之下，估计式

$$P_\omega(x,q,p_r)>\frac{E\,\mathrm{li}\,x}{\varphi(q)}-|R|$$

对于 (ω) 一致地成立，此处

$$E=1-\sum_{\substack{\alpha\leqslant r\\(p_\alpha,y)=1}}\frac{1}{\varphi(p_\alpha)}$$

$$+\sum_{\alpha\leqslant r}\sum_{\substack{\beta\leqslant r_1\\(p_\alpha p_\beta,y)=1\\\alpha>\beta}}\frac{1}{\varphi(p_\alpha)\varphi(p_\beta)}-\cdots-$$

$$-\overbrace{\sum_{\alpha<r}\sum_{\beta<r_1}\sum_{\gamma<r_1}\sum_{\delta<\gamma_2}\cdots\sum_{\mu\ \ r_n}}^{2l+1}_{\substack{\alpha>\beta>\cdots>\mu\\(p_\alpha p_\beta\cdots p_\mu,\,y)=1}}\frac{1}{\varphi(p_\alpha)\cdots\varphi(p_\mu)},$$

$$R=O((1+r)(1+r_1)^2\cdots(1+r_n)^2x^{1/2}\log x).$$

证：命 $P_\omega(q;p_1,\cdots p_r)=P_\omega(x,\ q,\ p_r)$. 特别地，我们有 $P_\omega(q)=\pi(x,q,a)$。$P_\omega(q;p_1,\cdots,\ p_{r-1})$ 与 $P_\omega(q;p_1,\cdots,p_r)$ 之差等于适合下面条件的素数 p 的个数：

$$p\leqslant x,p\equiv a(\bmod q),p\not\equiv ai(\bmod pi)(1\leqslant i \leqslant r-1),p\equiv a_r(\bmod p_r).$$

由孙子定理可知同余式组

$$\begin{cases}y\equiv a_r(\bmod p_r),\\ y\equiv a(\bmod q).\end{cases}$$

右区间 $1\leqslant a^*\leqslant qp_r$ 中有唯一的解.若 $p_r\nmid y$，则 $(a^*,qp_r)=1$；否则 $(a^*,qp_r)>1$。为简单计，我们记 (ω) 表示所有 (ω_r)。所以

$$P_\omega(q;p_1,\cdots,p_{r-1})-P_\omega(x;p_1,\cdots,p_r)$$
$$=\begin{cases}=P_\omega(qp_r;p_1,\cdots,p_{r-1}),\text{if}\,p_r\nmid y;\\ \leqslant 1,\text{if}\,p_r\mid y,\end{cases}$$

$$P_\omega(q;p_1,\cdots,p_r)=P_\omega(q)-\sum_{\substack{\alpha=1\\p_\alpha\nmid y}}P_\omega(qp_\alpha;p_1,\cdots,$$
$$p_{\alpha-1})-\theta r,$$

$$0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

运用这个公式 r 次并给予限制 $\beta\leqslant r_1$，则得

$$P_\omega(q;p_1,\cdots,p_r)\geqslant P_\omega(q)-\sum_{\substack{\alpha=1\\p_\alpha\nmid y}}P_\omega(qp_\alpha)$$

$$+\sum_{\substack{\alpha\leqslant r \\ \alpha>\beta \\ (p_\alpha p_\beta, y)=1}}\sum_{\beta\leqslant r_1} P_\omega(qp_\alpha p_\beta; p_1,\cdots,p_{\beta-1})$$

$$-\theta(r+rr_1), 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

命 $r\geqslant r_1\geqslant\cdots\geqslant r_n\geqslant 1$ 为一个整数列，由于

$$P_\omega(qp_\alpha\cdots p_\mu; p_1,\cdots,p_{\mu-1})\leqslant P_\omega(qp_\alpha\cdots p_\mu),$$

所以

$$P_\omega\ (q; p_1,\cdots,p_r)\ \geqslant P_\omega(q)-\sum_{\substack{\alpha\leqslant r \\ (p_\alpha, y)=1}} P_\omega(qp_\alpha)$$

$$+\sum_{\substack{\alpha\leqslant r \\ \alpha>\beta \\ (p_\alpha p_\beta, y)=1}}\sum_{\beta\leqslant r_1} P_\omega(qp_\alpha p)$$

$$-\cdots-\overbrace{\sum_{\substack{\alpha\leqslant r \\ \alpha>\beta>\cdots>\mu \\ (p_\alpha p_\beta\cdots p_\mu, y)=1}}\sum_{\beta\leqslant r_1}\cdots\sum_{\mu\leqslant r_n}}^{2\nu+1} P_\omega(qp_\alpha\cdots p_\mu)$$

$$-(1+r)(1+r_1)^2\cdots(1+r_n)^2.$$

因我们已假定(R^*)成立，所以

$$P_\omega(q; p_1,\cdots,p_r)\ \geqslant\frac{E\text{li}x}{\varphi(q)}-|R|.$$

引理成立。

定理 B 的证明。命 ε 为一个足够小的正数，命

$h=\dfrac{55}{35}+\varepsilon$. 则存 δ_0 使当 $\delta>\delta_0$ 时

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{\substack{\delta<p\leqslant\delta^h \\ p+q\ y}}\frac{1}{\varphi(p)}<\log(h+\varepsilon)<0.452=\tau, \\ \displaystyle\prod_{\substack{\delta<p\leqslant\delta^h \\ p+q\ y}}\left(1-\frac{1}{\varphi(p)}\right)^{-1}<h+\varepsilon<1.572=\lambda.\end{cases}$$

命 $p_r = p_{r1}$ 表示不超过 $x^{1/13}$ 的最大素数。若 $2 \leqslant k \leqslant t+1$，我们用 p_{rk} 表示不超过 $x^{\frac{1}{13h^{k-1}}}$ 的最大素数，此处 p_{rt+1} 具有性质 $p_{r\,t+1}^{1/h} < \delta_0 \leqslant p_{r\,t+1}$。命 n 为满足 $2n > 2t + r_{t+1}$ 的一个整数，命 $r_k = r_{t+1}(t+1 \leqslant k \leqslant n)$。则我们得（见〔4〕）

$$P_\omega(x, q, x^{1/13}) > \frac{E\operatorname{li}x}{\varphi(q)} - |R|,$$

此处

$$E > (1 - 0.0073193) \prod_{\substack{2 < p \leqslant x^{1/13} \\ p \nmid qy}} \left(1 - \frac{1}{\varphi(p)}\right)$$

$$> 25.8096 e^{-\gamma} \prod_{\substack{p \mid qy \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{1}{\log x}$$

$$+ O\left(\frac{c_{qy}}{\log^2 x}\right),$$

$$R = O\left(x^{\frac{1}{2} + \frac{3}{13} + \frac{2}{13h} + \frac{2}{13h^2} + \cdots} \log x\right)$$

$$= O\left(x^{\frac{1}{2} + \frac{3}{13} + \frac{2}{13(h-1)}} \log x\right) = O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right).$$

故得定理。

§7

定理 C_1。命 α, β 为两个满足 $8 > \beta > 4$ 与 $\beta \geqslant \alpha > 2$ 的正数，则

$$\sum_{\substack{x^{1/\beta} < p \leqslant x^{1/\alpha} \\ p \nmid qy}} P_\omega(x, pq, x^{1/\beta})$$

$$\leqslant\left(\frac{c_{qy}}{\varphi(q)}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\Lambda_1(u)}{u}du\right)\frac{x}{\log^2 x}$$

$$+O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x\right)$$

此处 q 是一个给定正整数.

证：命 $n=[\log x]$， $u_l=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}l(0\leqslant l\leqslant n)$. 则

$$\sum_{\substack{x^{1/\beta}<p\leqslant x^{1/\alpha}\\ p\nmid qy}}P_\omega(x,pq,x^{1/\beta})$$

$$=\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{\substack{x^{\frac{1}{u_{l+1}}}<p\leqslant x^{\frac{1}{u_l}}\\ p\nmid qy}}P_\omega\left(x,x^{\frac{1}{\frac{\log x}{\log pq}}},x^{1/\beta}\right)$$

$$=\sum_{l=0}^{n-1}T_l,$$

$$T_l=\sum_{\substack{x^{\frac{1}{u_{l+1}}}<p\leqslant x^{\frac{1}{u_l}}\\ p\nmid qy}}P_\omega\left(x,x^{\frac{1}{\frac{\log x}{\log pq}}},x^{1/\beta}\right)$$

$$\leqslant\sum_{\substack{x^{\frac{1}{u_{l+1}}}<p\leqslant x^{\frac{1}{u_l}}\\ p+qy}}\Lambda_1\left(\frac{\text{lng}x}{\log qp}\right)\frac{c_{qy}x}{\varphi(p)\varphi(q)\log^2 x}$$

$$+O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x\log\frac{u_{l+1}}{u_l}\right).$$

因 $\Lambda_1\left(u+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)=\Lambda_1(u)+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$及 $\Lambda_1(u)$ 是一个递减函数，所以

$$T_l \leqslant A_1(u_l)\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2 x}\log\frac{u_{l+1}}{u_l} + O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x\log\frac{u_{l+1}}{u_l}\right).$$

因

$$\sum_{l=1}^{n-1} A_1(u_l)\log\frac{u_{l+1}}{u_l} - \int_\alpha^\beta \frac{A_1(u)}{u}du$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{n-1}(A_1(u_{l+1}) - A_1(u_l))\max_{0<l\leqslant n-1}\log\frac{u_{l+1}}{u_l}$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

所以

$$\sum_{l=1}^{n-1} T_l \leqslant \left(\frac{c_{qy}}{\varphi(q)}\int_\alpha^\beta \frac{A_1(u)}{u}du\right)\frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x\right).$$

定理证完。

定理C_2。命 $3\leqslant\alpha<\beta\leqslant13$ 为两个给定的数。则

$$P_\omega(x,q,x^{1/\alpha}) \geqslant P_\omega(x,q,x^{1/\beta}) - \frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2 x}\int_\alpha^\beta \frac{A(u)}{u}du + O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x\right),$$

此处 q 是一个给定的正整数。

证：显然我们可以假定 $\alpha < U < \beta$。我们估计 $P_\omega(x, q, x^{1/\beta}) - P_\omega(x, q, x^{1/U})$ 与 $P_\omega(x, q, x^{1/U}) - P_\omega(x, q, x^{1/\alpha})$。

$P_\omega(x, q, p_m)$ 与 $P_\omega(x, q, p_{m+1})$ 之差为适合下面条件

$$p \leqslant x,\ p \equiv a(\bmod q),\ p \not\equiv a_i(\bmod p_i)\ (i \leqslant m),\ p \equiv a_{m+1}(\bmod p_{m+1}).$$

的素数个数，若 $p_{m+1} \nmid y$，则由定义可知它等于 $P_\omega(x, qp_{m+1}, p_m)$；否则它等于 0 或 1，所以

$$P_\omega(x, q, p_m) - P_\omega(x, q, p_{m+1}) \begin{cases} = P_\omega(x, qp_{m+1}, p_m), \text{当} p_{m+1} \nmid y; \\ \leqslant 1, \text{当} p_{m+1} \mid y. \end{cases}$$

将 $x^{1/U}$ 与 $x^{1/\alpha}$ 之间的素数排列为

$$p_t \leqslant x^{1/U} < p_{t+1} < \cdots < p_s \leqslant x^{1/\alpha} < p_{s+1}.$$

则

$$P_\omega(x, q, x^{1/U}) = P_\omega(x, q, x^{1/\alpha}) + \sum_{\substack{t \leqslant i < s \\ p_{i+1} \nmid qy}} P_\omega(x, p_{i+1}, q, p_i) + O(1).$$

命 $n = [\log x]$ 及 $u_m = \alpha + \dfrac{U - \alpha}{n} m\ (0 \leqslant m \leqslant n)$，并置

$$T = \sum_{\substack{t \leqslant i < s \\ p_{i+1} \nmid qy}} P_\omega(x, qp_{i+1}, p_i) = \sum_{m=0}^{n-1} T_m.$$

由于 $p_i < qp_{i+1} < 4qp_i$ 及 $\Lambda(u)$ 为区间 (α, U) 中的递减函数，所以

$$T_m = \sum_{\substack{x^{\frac{1}{u_{m+1}}} < p_{i+1} \leqslant x^{\frac{1}{u_m}} \\ p_{i+1} \nmid qy}} P_\omega(x, qp_{i+1}, p_i)$$

$$= \sum_{\substack{x^{\frac{1}{u_{m+1}}} < p_{i+1} \leqslant x^{\frac{1}{u_m}} \\ p_{i+1} \nmid qy}} P_{\omega}(x, qp_{i+1}, x^{\frac{\log p}{\log x}})$$

$$\leqslant \Lambda(u_m) \frac{c_{qy} x}{\varphi(q) \log^2 x} \log \frac{u_{m+1}}{u_m}$$

$$+ O\left(\frac{c_{qy} x}{\log^3 x} \log \log x \log \frac{u_{m+1}}{u_m} \right).$$

因

$$\sum_{m=1}^{n-1} \Lambda(u_m) \log \frac{u_{m+1}}{u_m} - \int_{\alpha}^{U} \frac{\Lambda(u)}{u} du = O\left(\frac{1}{\log x} \right).$$

所以

$$T \leqslant \left(\frac{c_{qy}}{\varphi(q)} \int_{\alpha}^{U} \frac{\Lambda(u)}{u} du \right) \frac{x}{\log^2 x}$$

$$+ O\left(\frac{c_{qy} x}{\log^3 x} \log \log x \right).$$

因此

$$P_{\omega}(x, q, x^{1/U}) \leqslant P_{\omega}(x, q, x^{1/\alpha})$$

$$+ \left(\frac{c_{qy}}{\varphi(q)} \int_{\alpha}^{U} \frac{\Lambda(u)}{u} du \right) \frac{x}{\log^2 x}$$

$$+ O\left(\frac{c_{qy} x}{\log^3 x} \log \log x \right).$$

类似地，我们有

$$P_{\omega}(x, q, x^{1/\beta}) \leqslant P_{\omega}(x, q, x^{1/U})$$

$$+ \left(\frac{c_{qy}}{\varphi(q)} \int_{U}^{\beta} \frac{\Lambda(u)}{u} du \right) \frac{x}{\log^2 x}$$

$$+ O\left(\frac{c_{qy} x}{\log^3 x} \log \log x \right).$$

故定理得证。

§8

命 $4<v<8, 2<u\leqslant v$ 为两于给定正数，命M表示适合下面条件的素数集合：

$$(11)\qquad \begin{aligned} &p\leqslant x,\ p\equiv a(\bmod q),\ p\not\equiv a_i(\bmod p_i)\ (i\leqslant s),\\ &p\not\equiv a_{s+j}(\bmod p_{s+j})\ (j\leqslant t-s), \end{aligned}$$

此处 $p_s\leqslant x^{1/v}<p_{s+1}$，$p_t\leqslant x^{1/u}<p_{t+1}$ 及 q 为一个给定正整数。

M的元素个数记为 $M_\omega(x, x^{\frac{1}{v}}, x^{\frac{1}{u}})$。

引 4. 存在诸整数列(ω_j)使M中至少适合同余式

$$(12)\qquad p\equiv a_{s+j}(\bmod p_{s+j})\ (1\leqslant j\leqslant t-s)$$

中的 l 个的元素个数不超过

$$\frac{1}{l}\sum_{\substack{j\leqslant t\\ p_{s+j}\nmid y}} P_{\omega_j}(x, qp_{s+j}, x^{1/v}).$$

证：命 Γ_j 为M的子集，其元素适合同余式

$$p\equiv a_{s+j}(\bmod p_{s+j}).$$

现在我们来估计 Γ_j 的元素个数。若 $p_{s+j}|y$，则Γ_j的元素个数为 0 或 1。假定 $p_{s+j}\nmid y$。记同余方程组

$$\begin{cases} n\equiv a_{s+j}(\bmod p_{s+j}),\\ n\equiv a(\bmod q)\end{cases}$$

的解为 $\tilde{a}_{s+j}$。命

$$(\omega_j)\qquad \tilde{a}_{s+j}, qp_{s+j}; a_i\quad (1\leqslant i\leqslant t).$$

则 Γ_j 的元素个数不超过 $P_{\omega_j}(x, qp_{s+j}, x^{\frac{1}{v}})$。

若M的元素至少适合（12）中l个同余式，则它至少属于l个不同的Γ_j。因此M的元素，它至少适合（12）中l个同余式者的个数不超过

$$\frac{1}{l}\sum_{\substack{j\le t-s\\ p_{s+j}\nmid y}} P_{\omega j}(x,qp_{s+j},x^{1/v}).$$

故得引理。

定理D。M中的元素至少满足（12）式中的m个同余式者之个数不少于

$$P_\omega(x,q,x^{1/v})-\frac{1}{m+1}\left(\int_u^v \Lambda_1(t)\frac{dz}{z}\right)$$

$$\frac{c_{q\,y}x}{\varphi(q)\log^2 x}+O\left(\frac{c_{q\,y}x}{\log^3 x}\log\log x\right).$$

证：由于

$$P_\omega(x,q,x^{1/v})-M_\omega(x,x^{1/v},x^{1/u})$$

$$\le\sum_{j<t-s}\sum_{\substack{p\equiv a_{s+j}(\mathrm{mod}\ p^2_{s+j})\\ p\le x}}1$$

$$\le\sum_{1\le j\le t-s}\left(\frac{x}{p^2_{s+j}}+1\right)=O(x^{1/u})+O(x^{1-\frac{1}{v}}),$$

所以由引4与定理C_1可知M的元素至少适合（12）中的m个同余式者之个数不少于

$$M_\omega(x,x^{1/v},x^{1/u})-\frac{1}{m+1}$$

$$\sum_{\substack{j\le t-s\\ p_{s+j}\nmid y}}P_{\omega j}(x,qp_{s+j},x^{1/v})+O(1)$$

$$\ge P_\omega(x,q,x^{1/v})-\frac{1}{m+1}\left(\int_u^v\Lambda_1(z)\frac{dz}{z}\right)$$

$$\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2 x}+O\left(\frac{c_{yq}x}{\log^3 x}\log\log x\right).$$

定理证完。

§9

由定理 B 及定理 C_2 可知

$$P_\omega(x,q,x^{1/6})>\left(25.8096-\int_6^{13}\frac{\Lambda(u)}{u}du\right)$$

$$\frac{c_{yq}x}{\varphi(q)\log^2 x}+O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x\right)$$

$$>8.4\frac{c_{yq}x}{\varphi(q)\log^2 x}+O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x\right).$$

(i) 命 $x=y$ 为偶数。命

(ω_1) $a=1,q=2;a_i=x(i=1,2,\cdots)$.

由(9)可知存在正常数 x_1，使当 $x>x_1$ 时有

$$P_{\omega 1}(x,2,x^{1/6})-\frac{1}{3}\left(\int_3^6\frac{\Lambda_1(u)}{u}du\right)\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}$$

$$+O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^3 x}\log\log x\right)>(8.4-6.588)\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}$$

$$+O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^3 x}\log\log x\right)>\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}>1.$$

因此由定理 D 可知当 $x>x_1$ 时，存在一个素数 p 满足 $1<p<x-1$ 及 $x-p$ 没有 $\leqslant x^{1/6}$ 的素因子，在区间 $x^{1/6}<p'\leqslant x^{1/3}$ 中最多 2 个素因子，因此 $x-p$ 为不超过 3 个素数的乘积。因为 $x=p+x-p$，故得定理

(ii) 命 $x=y$ 为一个奇数。命

(ω_2)　　$a = x-2$，$q=4$；$a_i = x$　$(i=1,2,\cdots)$。

则由（9）可知存在正常数 x_2，使当 $x > x_2$ 时有

$$P_\omega(x,4,x^{1/6}) - \frac{1}{3}\left(\int_3^6 \frac{\Lambda_1(u)}{u}\,du\right)\frac{c_{4x}x}{2\log^2 x}$$

$$+O\left(\frac{c_{4x}x}{\log^3 x}\log\log x\right) > \frac{c_{4x}x}{2\log^2 x} > 2.$$

因此由定理 D 可知当 $x > x_2$ 时，存在一个素数 p 满足 $p < x-3$ 及 $\frac{x-p}{2}$ 没有 $\leqslant x^{1/6}$ 的素因子，它在区间 $x^{1/6} < p' \leqslant x^{1/3}$ 中最多只有 2 个素因子，因此 $\frac{x-p}{2}$ 为一个不超过 3 个素数的乘积，故得定理 3。

(iii) 命 k 为一个正整数。命

(ω_3)　　$a=1$，　$q=2$；　$a_i = -2k$　$(i=1,2,3,\cdots)$。

则由（9）可知存在一个正常数 x_3 使当 $x > x_3$ 时，有

$$P_\omega(x,2,x^{1/6}) - \frac{1}{3}\left(\int_3^6 \frac{\Lambda_1(u)}{u}\,du\right)\frac{c_{4k}x}{\log^2 x}$$

$$+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right) > \frac{c_{4k}x}{\log^2 x}.$$

所以由（9）可知，当 $x > x_3$ 时存在不少于 $\frac{c_{4k}x}{\log^2 x}$ 个素数 p 满足 $1 < p \leqslant x$ 及 $p+2k$ 最多只有 3 个素因子，故得定理 2。

取 $c=1$。则由引 2 与定理 A 可知

$$P_{\omega_2}\left(x,\ 2, \frac{x^{1/4}}{\log^3 x}\right) \leqslant 8 \prod_{\substack{p/2k \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2}$$

$$\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\log^2 x}$$

$$+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right).$$

由于

$$Z_k(x)=\sum_{\substack{p\leqslant\frac{x^{1/4}}{\log^3 x}\\ p+2=p'}}1+\sum_{\substack{\frac{x^{1/4}}{\log^3 x}<p\leqslant x\\ p+2=p'}}1\leqslant O(x^{1/4})$$

$$+P_{\leqslant 3}\left(x,2,\frac{x^{1/4}}{\log^3 x}\right)$$

$$\leqslant 8\prod_{\substack{p\mid k\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\log^2 x}$$

$$+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right),$$

故得定理 4.

参 考 文 献

〔1〕Wang Yuan 1957 On Sieve Methods and Some of the Related Problems, Science Record, Vol.I, No.1, 9—11.

〔2〕Wang Yuan 1959 On Sieve Methods and Some of Their Applications, Scientia Sinica, 8, 375—381.

〔3〕Чудаков, Н.Г.1948 О конечной Разности для функций $\Psi(x,k,l)$, ИАН СССР, серия матем, 12, 31—46.

〔4〕Wang yuan 1956 On the representation of large integer as a sum of a Prime and a Product of at most 4 Primes, Acta Mathematica Sinica, 6 (4), 565—582.

[5] ВиноГрадов, А.И.1957 ПРименение $\zeta(s)$ к Решету ЭРатосфена, Мам.СБ; 41, 49—80.

附　　录

1°．我们将弱广义黎曼猜想叙述于下：

(R_δ)所有狄里希勒 L-函数 $L(s,\chi)$ 的所有零点的实部皆$\leqslant\delta^{-1}$，此处$1<\delta\leqslant 2$。

特别地，(R_2)就是熟知的广义黎曼猜想。

为简单计，我们将下面的命题记为(1,A)：

每个充分大的偶数皆为一个素数及一个素因子个数不超过 A 的殆素数之和。

在此我们陈述下面改进得更精密的结果：

定理 1．(1，3)可以由(R_{δ_1})推出来，此处$\delta_1\geqslant 2.475/1.475$及(1，4)可以从($R_{\delta_2}$)推出来，此处$\delta_2\geqslant 3.237/2.237$。

所有以下的结果都是由假设(R_δ)之下推出来的，不再声明。

2°．命 $\eta=\dfrac{\delta}{\delta-1}$，则 $x^{1/u}\leqslant q\leqslant c_0x^{1/u}$，此处 c_0 为一个常数，则估计式对于

$$(1)\qquad P_\omega(x,q,x^{1/u})\leqslant A(u)\frac{c_{q\nu}x}{\varphi(q)\log^2 x}+O\left(\frac{c_{q\nu}x\log\log x}{\varphi(q)\log^3 x}\right)$$

对于(ω)一致成立，此处

$$(2)\qquad \Lambda(u)=\frac{4\eta n}{u-\eta}e^{\gamma}(\text{if }\eta<u\leqslant 3\eta)$$

及

$$(3)\qquad \Lambda(u)=\frac{2ue^{\gamma}}{\frac{u-\eta}{\eta}-1-\frac{u-\eta}{2\eta}\log\frac{u-\eta}{2\eta}}(\text{if }3\eta<u\leqslant 7\eta).$$

3°．命 $v>2\eta$ 为一个给定的数及 $q=x^{1/u}$．

则

$$(4)\qquad P_{\omega}(x,q,x^{1/v})\leqslant \Lambda_1(u)\frac{c_{qv}x}{\varphi(q)\log^2 x}$$

$$+O\left(\frac{xc_{qv}\log\log x}{\varphi(q)\log^3 x}\right)$$

对于(ω)一致成立，此处

$$(5)\qquad \Lambda_1(u)=\frac{4\eta u}{u-\eta}e^{\gamma}$$

对于 $\eta<u\leqslant\dfrac{1}{\dfrac{1}{\eta}-\dfrac{2}{v}}$ 成立，及

$$(6)\qquad \Lambda_1(u)=\frac{2ve^{\gamma}}{v\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{u}\right)-1-\frac{v}{2}\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{u}\right)\log\frac{v}{2}\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{u}\right)}$$

对于

$$\frac{1}{\frac{1}{\eta}-\frac{2}{v}}<v<\begin{cases}\dfrac{1}{\dfrac{1}{\eta}-\dfrac{4}{v}}&(\text{当 }v>4\eta);\\ \infty&(\text{当 }v\leqslant 4\eta)\end{cases}$$

成立。

4°．命 q 为一个整数．则

(7) $$P_w(x,q,x^{1/6.5\eta})>\lambda(6.5\eta)\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2 x}+O\left(\frac{xc_{qy}}{\log^3 x}\right),$$

此处

(8) $$\lambda(6.5\eta)\geqslant 2\eta\times 6.453306.$$

证明类似于定理 B 的证明，本质的差别为在此我们取 $\tau=0.452$ 与 $\lambda=1.5715$ 从而获得更为准确的估计

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}[(k+1)\tau]^{2k+4}}{(2k+4)!}<\sum_{k=0}^{6}\frac{\lambda^{k+1}[(k+1)\tau]^{2k+4}}{(2k+4)!}+\frac{\lambda^8(8\tau)^{18}}{18!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\tau^2e^2}{4}\times\frac{6561}{6080}\right)^k$$

$$<0.007183682.$$

5°. 命 $\eta<\alpha<\beta\leqslant 6.5\eta$ 为两个正数。命 q 为一个正整数. 则

$$P_\omega(x,q,x^{1/\alpha})\geqslant P_\omega(x,q,x^{1/\beta})-\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2 x}\int_\alpha^\beta\frac{\Lambda(u)}{u}\,du$$

(9) $$+O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x\right).$$

6°. 命 u,v 为两个数满足 $2\eta<v<10\eta$ 与 $\eta<u<v$. 命 M 表示适合下面条件的素数 p 的集合：

$$p\leqslant x,\ p\equiv a(\mathrm{mod}\,q),\ p\not\equiv a_i(\mathrm{mod}\,p_i)\quad(i\leqslant s),$$

(10) $$p\not\equiv a_{s+j}(\mathrm{mod}\,p_{s+j}^2)\quad(i\leqslant t-s),$$

此处，$p_s\leqslant x^{1/v}<p_{s+1}$，$p_t\leqslant x^{1/u}<p_{t+1}$ 及 q 为一个整数，则最多适合同余式

$$(11)\qquad p\equiv a_{s+j}(\bmod p_{s+j})\quad (1\leqslant j\leqslant t-s)$$

中的 m 个的M的元素个数不少于

$$(12)\qquad P_{\omega}(x,q,x^{1/v})-\frac{1}{m+1}\left(\int_{u}^{v}\Lambda_1(z)\frac{dz}{z}\right)$$

$$\frac{c_{q\,v}x}{\varphi(q)\log^2 x}+O\left(\frac{c_{q\,v}x}{\log^3 x}\log\log x\right).$$

7°. 计算积分

(i)
$$\triangle_1=\int_{5\eta}^{6.5\eta}\frac{\Lambda(u)}{u}du$$

$$=2e^{\gamma}\int_{5\eta}^{6.5\eta}\frac{du}{\frac{u-\eta}{\eta}-1-\frac{u-\eta}{2\eta}\log\frac{u-\eta}{2\eta}}$$

$$=2\eta e^{\gamma}\int_{4}^{5.5}\frac{dw}{w-1-\frac{w}{2}\log\frac{w}{2}}$$

$$=2\eta e^{\gamma}\int_{4}^{5.5}f(w)dw$$

$$<2\eta e^{\gamma}\left(\sum_{i=0}^{1}f(4+0.02i)\right.$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{2}f(5.46+0.02j)\right)$$

$$<2\eta e^{\gamma}\times 0.89050652.$$

(ii) 在 3° 中命 $v=5\eta$. 则

$$\triangle_2=\int_{\frac{5}{3}\eta}^{5\eta}\frac{\Lambda_1(u)}{u}\,du$$

$$=\int_{\frac{5}{3}\eta}^{5\eta}\frac{2ve^{\gamma}}{v\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{u}\right)-1-\frac{v}{2}\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{u}\right)\log\frac{v}{2}\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{u}\right)}\frac{du}{u}$$

$$=20\eta e^{\gamma}\int_1^2\frac{dz}{(5-2z)(2z-1-z\log z)}$$

$$=20\eta e^{\gamma}\int_1^2 g(z)dz<20\eta e^{\gamma}\left(\sum_{i=0}^{7}g(1+0.02i)+\sum_{j=0}^{41}g(1.18+0.02j)\right)$$

$$<20\eta e^{\gamma}\times 0.3972371.$$

8°. 定理I的证明，命$x=y$为一个偶数，命

$(\omega)\qquad a=1,q=2;a_i=x\ (i=1,2,\cdots).$

(i) 命 $\eta=2.475$. 则由 2°－7° 可知存在常数x_1，使$x>x_1$时

$$P_{\omega}(x,2,x^{1/5\eta})-\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{15\eta}{5\eta-1}}^{5\eta}\frac{\Lambda_1(u)}{u}du\right)\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}$$

$$+O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^3 x}\log\log x\right)>P_{\omega}(x,2,x^{1/6\cdot 5\eta})$$

$$-\left(\int_{5\eta}^{6\cdot 5\eta}\frac{\Lambda(u)}{u}du+\frac{1}{2}\int_{\frac{15\eta}{5\eta-1}}^{5\eta}\frac{\Lambda_1(u)}{u}du\right)$$

$$\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}+O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}\log\log x\right)$$

$$>2\eta[6.453306-e^{\gamma}(0.89050652+1.9861855+0.738218)]\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}+O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^3 x}\log\log x\right)$$

$$>0.05\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}+O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^3 x}\log\log x\right)>1,$$

故由 6° 可知当$x>x_1$时，存在一个素数p满足$p<x-1$及$x-p$没有$\leqslant x^{\frac{1}{5\eta}}$的素因子而它在区间$x^{\frac{1}{5\eta}}<p'\leqslant x^{\frac{5\eta-1}{15\eta}}$中最

多只有一个素因子，因此 $x-p$ 为一个最多 3 个素数的乘积。故得（1,3）。

（ii） 命 $\eta=3.237$。则由 $2^\circ-7^\circ$ 可知存在 x_2，当 $x>x_2$ 时有

$$P_\omega(x,2,x^{1/5\eta})-\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{20\eta}{5\eta-1}}^{5}\frac{\Lambda_1(u)}{u}\,du\right)\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}$$

$$+O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^3 x}\log\log x\right)>0.01\,\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}$$

$$+O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^3 x}\log\log x\right)>1.$$

因此由 6° 可知当 $x>x_2$ 时，存在一个素数 p 满足 $p<x-1$ 及 $x-p$ 没有素因子 $\leqslant x^{\frac{1}{5}}$ 而在区间 $x^{\frac{1}{5}}<p'\leqslant x^{\frac{5\eta-1}{20\eta}}$ 中最多只有一个素因子。因此 $x-p$ 为一个最多 4 个素数的乘积。故得（1,4）。

9°. 可知，在定理 I 的证明中，猜想（R_δ）可以换成

$$(\widehat{\widehat{R}}_\delta)\qquad \sum_{D\leqslant x^{1/\eta}}\mu^2(D)\max_{\substack{l\,(\bmod D)\\(l,D)=1}}\left|\pi(x,D,l)-\frac{\operatorname{li}x}{\varphi(D)}\right|=O\left(\frac{x}{\log^A x}\right),$$

此为 A 为任意常数而与“O”有关的常数仅依赖于 δ 与 A。类似地，（R_δ）可以换成

$$(\widetilde{\widetilde{R}}_\delta)\qquad \sum_{D\leqslant x^{1/\eta}}\mu^2(D)\max_{\substack{l\,(\bmod D)\\(l,D)=1}}\left|P(x,D,l)-\frac{x}{\varphi(D)\log x}\right|=O\left(\frac{x}{\log^A x}\right),$$

此处 $P(x,D,l)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,D)}}\log p\cdot e^{-\frac{\log x}{x}p}$ (见[1],[2])。

巴尔巴恩[3,4]首先证明了 ($\widetilde{\widetilde{R}}_{1,2}$)。以后,潘承洞[2]又独立地证明了($\widetilde{\widetilde{R}}_{1,5}$),并由此导出 (1,5) 。由定理Ⅰ，我们能够由 ($\widetilde{\widetilde{R}}_{1,5}$) 推出 (1,4) 。换言之，我们证明了定理Ⅱ。每个充分大的偶数都是一个素数及一个不超过4个素数的乘积之和。

注记：(1,4) 也被潘承洞与巴尔巴恩独立地加以证明。但他们的证明方法比这里复杂得多，事实上，他们的证明分别依赖于 ($\widetilde{\widetilde{R}}_{1,6}$) 与 ($\widetilde{R}_{1,6}$) (见[5]) 。我感谢潘承洞与巴尔巴恩先生，他们友好地将他们的结果告诉了我。

考 参 文 献

[1] Реньи, А. 1948 ОпРедставлении четных чисел в виде суммы пРостого и почти пРостого числа, ИАН,СССР2,57—78.

[2] Pan Chin Tong, 1962 On the rePresentation of larg even integer as a sum of a Prime and an almost Prime, Acta Math.Sinica, Vol.12, No. 1,95—106.

[3] БаРбан,М.Б.1961 АРифметические функции на Редких множествах,Доклады Академии Наук УзССР,8,9—11.

[4] БаРбан, М.Б.1961 Новые пРименении большого Решета Ю. В. Линника, ТРуды Института Мамежамики,им.В.И.Романобского,вып.22,

〔5〕 Линник, Ю. В. 1960 Асимптотическая формула в аддитивной проблеме Гарди Литтльвуда, ИАН СССР, Том 24, No5, 629—706.

13 表偶数为素数及殆素数之和*

潘 承 洞

§1

设 N 为大偶数，$V(m)$ 为 m 的素因子的个数，在 1948 年 A. Renyi[1]证明了

$$N = a + b,$$

这里，$V(a)=1, V(b)\leqslant K, K$ 为一绝对常数。在广义黎曼猜测下王元证明了 $K\leqslant 3$。本文证明了 $K\leqslant 5$，即证明了下面的定理：

定理．任一充分大的偶数 N 可表成 $p+P$ 之和，其中 p 为素数，P 为一个不超过 5 个素因子的乘积的殆素数。

定理的证明依赖于下面的基本定理。

基本定理．令

$$P_1(N, D, l) = \sum_{\substack{p < N \\ p \equiv l \pmod{D}}} \log p \cdot e^{-p\frac{\log N}{N}}$$

$$= \frac{N}{\varphi(D)\log N} + R_D(N), \qquad (1.1)$$

* 王元同志对本文提出了很宝贵的意见，谨此致谢。

$$(l,D)=1,$$

则

$$\sum_{d\leqslant N^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} |\mu(d)\tau(d)R_a(N)| \leqslant \frac{N}{\log^5 N}, \qquad (1.2)$$

这里 ε 为任意小之正数，τ（d）为除数函数。

基本定理的证明主要依赖于有关 L- 函数的零点密度的估计。

我们要采用下面的记号：

$C_1, C_2, \cdots$——正的绝对常数；

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$——任意小的正常数；

B——表示其模为有界量，不是各处都相同的；

$p, p_1, p_2, \cdots$——奇素数；

$\chi_D(n)$——模 D 的特征；

$\chi_D^0(n)$——模 D 的主特征；

$\rho_{\chi_D}=\beta_{\chi_D}+i\tau_{\chi_D}$——$L(s,\chi_D)$的零点；

N——充分大的偶数。

§2

定理 2.1. 设N（$\triangle$，T，D）记作所有属于模 D 的 L（s,χ_D）在下面的矩形(R)内的零点的个数（计算它们的重数）.

$$\triangle\leqslant\sigma\leqslant 1.\ |t|\leqslant T. \qquad (R)$$

这里$\triangle\geqslant 1/2$,则有

$$N(\triangle,T,D)<C_{15}D^{(2+4c)(1-\triangle)}T^3\log^6 DT.$$

这里 C 由下式确定

$$\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi_D\right)\right|\leqslant 3D^C(|t|+1),$$

$C\leqslant 1/4+\varepsilon_1$（参考引理 2.2）.

这里的结果当矩形 R 的面积远小于模 D 时，它优于 Tatugawa 的结果（参考〔3〕）.

我们要用到下面的引理.

引理 2.1[4]. 设 $0\leqslant\alpha<\beta<2$，$f(s)$ 除了 $s=1$ 这点外在 $\sigma\geqslant\alpha$ 时是解析的，当 s 为实数时，$f(s)$ 为实数，且有

$$|Ref(2+it)|\geqslant m>0,$$

及

$$|f(\sigma'+it')|\leqslant M_{\sigma,t}(\sigma'\geqslant\sigma,1\leqslant i\leqslant t),$$

则当 T 不是 $f(s)$的零点的纵坐标时，有

$$|\arg f(\sigma+iT)|\leqslant\frac{\pi}{\log\left(\frac{\pi-\alpha}{\pi-\beta}\right)}\left(\log M_{\alpha,T+2}+\log\frac{1}{m}\right)+\frac{3\pi}{2},$$

对 $\sigma\geqslant\beta$.

引理 2.2. 存在 $C\leqslant\frac{1}{4}+\varepsilon_1$ 使下面估计式成立，

$$\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi_D\right)\right|\leqslant 3D^C(|t|+1),\ (\chi_D\neq\chi_D^0)$$

证：熟知任一特征$\chi_D(n)$可表成$\chi_D(n)=\chi^0_{D_1}(n)\chi_{D_2}(n)$，这里 $\chi_{D_2}(n)$为模 D_2 的原特征，$(D_1,D_2)=1$，$D_1D_2\leqslant D$.

设 $s=1/2+it$，我们有下面的恒等式

$$\sum_{n\geqslant z}\frac{\chi_D(n)}{n^s}=\sum_{\substack{n\geqslant z\\(n,D_1)=1}}\frac{\chi_{D_2}(n)}{n^s}$$

$$= \sum_{d \mid D_1} \frac{\chi_{D_2}(d)\mu(d)}{d^s} \sum_{nd \le z} \frac{\chi_{D_2}(n)}{n^s}, \tag{2.1}$$

而

$$\left| \sum_{nd \le z} \frac{\chi_{D_2}(n)}{n^s} \right| \le \int_{\frac{z}{d}}^{\infty} \left| \sum_{\frac{z}{d} < n < u} \chi_{D_2}(n) \right| \cdot |du^{-s}|$$

$$< 2|s| \sqrt{D_2} \log D_2 \left(\frac{z}{d} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\le 2(|t|+1)\sqrt{D} \log D \left(\frac{z}{d} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.2}$$

由(2.2)及(2.1)推出

$$\left| \sum_{n \le z} \frac{\chi_D(n)}{n^s} \right| \le 2(|t|+1)\sqrt{D}$$

$$\log D \tau(D_1) z^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

另一方面

$$|L(s, \chi_D)| \le \left| \sum_{n \le z} \frac{\chi_D(n)}{n^s} \right| + \left| \sum_{n > z} \frac{\chi_D(n)}{n^s} \right|. \tag{2.4}$$

取 $z = \sqrt{D}$，从(2.3)，(2.4)得

$$|L(s, \chi_D)| \le D^{\frac{1}{4}} + 2(|t|+1) D^{\frac{1}{4}+\varepsilon_1}$$

$$\le 3(|t|+1) D^{\frac{1}{4}+\varepsilon_1}.$$

引理 2.3. 设

$$\rho_{\chi_D}(s, z) = \rho_{\chi_D}(s) = \sum_{n \le z} \frac{\mu(n)\chi_D(n)}{n^s}.$$

这里 $z \ge D \log D$，则

$$\sum_{\chi_D} \left| \rho_{\chi_D}\left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \le C_1 z + \varphi(D) \log z.$$

证：

$$\sum_{\chi_D}\left|\rho_{\chi_D}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2=\sum_{\chi_D}\sum_{n\le z}\frac{\mu(n)\chi_D(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}}\sum_{m\le z}$$

$$\frac{\mu(m)\overline{\chi_D(m)}}{m^{\frac{1}{2}-it}}\leqslant\varphi(D)\sum_{n\le z}\frac{\mu^2(n)}{n}$$

$$+2\varphi(D)\sum_{\substack{m<n\le z\\ n\equiv m(\bmod D)}}\frac{1}{(nm)^{\frac{1}{2}}}\leqslant\varphi(D)\log z+C_1z.$$

引理2.4. 设

$$f_{\chi_D}(s,z)=f_{\chi_D}(s)=L(s,\chi_D)\rho_{\chi_D}(s)-1.$$

$0<\delta<1$，则

$$\sum_{\chi_D}|f_{\chi_D}(1+\delta+it)|^2$$

$$\leqslant C_4\left(\frac{D}{z}\delta^{-1}\log^3 z+\delta^{-2}\log^2 z\right).$$

证：

$$f_{\chi_D}(s)=L(s,\chi_D)\rho_{\chi_D}(s)-1=\sum_{n\ge z}\frac{a_n\chi_D(n)}{n^s},$$

这里

$$a_n=\sum_{\substack{d\mid n\\ d<z}}\mu(d)$$

$$\sum_{\chi_D}|f_{\chi_D}(1+\delta+it)|^2\sum_{\chi_D}\sum_{n\ge z}\frac{a_n\chi_D(n)}{n^{1+\delta+it}}$$

$$\sum_{m\ge z}\frac{a_m\overline{\chi_D(m)}}{m^{1+\delta-it}}\leqslant\varphi(D)\sum_{n\ge z}\frac{a_n^2}{n^{2+2\delta}}$$

$$+2\varphi(D)\sum_{\substack{z\le m<n\\ n\equiv m(\bmod D)}}\frac{|a_na_m|}{(nm)^{1+\delta}}$$

$$\leqslant\varphi(D)\sum_{n\geqslant z}\frac{\tau^2(n)}{n^{1+2\delta}}+2\varphi(D)\sum_{\substack{z\leqslant m<n\\ n\equiv m(\bmod dD)}}\frac{\tau(n)\tau(m)}{(nm)^{1+\delta}}$$

$$\leqslant\varphi(D)(\Sigma^1+\Sigma^2), \tag{2.5}$$

这里

$$\Sigma^1=\sum_{n\geqslant z}\frac{\tau^2(n)}{n^{1+\delta}}\leqslant 4\int_z^{\infty}\sum_{z\leqslant n<u}\tau^2(n)\cdot n^{-3-2\delta}du$$

$$\leqslant C_2 z^{-1}\delta^{-1}\log^3 z. \tag{2.6}$$

$$\Sigma^2\leqslant 2\sum_{\substack{z\leqslant m<n\\ n\equiv m(\bmod dD)}}\frac{\tau(n)\tau(m)}{(nm)^{1+\delta}}$$

$$\leqslant C_3 D^{-1}\delta^{-2}\log^2 z. \tag{2.7}$$

由(2.5),(2.6),(2.7)得

$$\sum_{\chi_D}|f_{\chi_D}(1+\delta+it)|^2\leqslant C_4(D\cdot z^{-1}\delta^{-1}\log^3 z$$

$$+\log^2 z\cdot\delta^{-2}).$$

引理 2.5. 设 $g_{\chi_D}(s,z)=g_{\chi_D}(s)=1-f^2_{\chi_D}(s)$,

$$G(s,z)=G(s)=\prod_{\chi_D}g_{\chi_D}(s),$$

则 $G(s)$具有下面的性质:

1) 对实数 s, $G(s)$取实数;

2) $ReG(2+it)\geqslant 1/2$.

证: 1) (参考[3]);

2) 因 $|f_{\chi_D}(2+it)|\leqslant\left|\sum_{n\geqslant z}\frac{a_n t_D(n)}{n^{2+it}}\right|$

$$\leqslant\sum_{n\geqslant z}\frac{\tau(n)}{n^2}\leqslant\frac{3\log z}{z},$$ 则有

$$ReG(2+it)=Re\prod_{\chi_D}(1-f^2_{\chi_D}(2+it))$$

$$\geqslant 1-\left\{\prod_{\chi_D}(1+|f_{\chi_D}|^2)-1\right\}$$

$$\geqslant 2-\left(1+\frac{10}{D^2}\right)^D \geqslant \frac{1}{2}.$$

引理 2.6. 设 $f_1(s), f_2(s), \cdots, f_n(s)$ 为在带 $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta$ 内解析且有界的函数，令

$$F(s)=\sum_{i=1}^{n}|f_i(s)|^2,$$

$$M(\sigma)=\sup_{\operatorname{Re} s=\sigma} F(s),$$

则

$$M(\sigma) \leqslant M(\alpha)^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}} M(\beta)^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}}.$$

证（参考〔3〕）：

由熟知的 Littlewood 定理及引理 2.1 得

$$N(\triangle, T, D) \leqslant C_5 \delta^{-1} \int_{-T}^{T} \sum_{\chi_D} |f_{\chi_D \triangle}(-\delta+it)|^2 dt$$

$$+\max_{\substack{\sigma=-\delta \\ |t| \leqslant T+2}} \sum_{\chi_D} |f_{\chi_D}(s)|^2. \qquad (2.8)$$

为了利用引理 2.6，引入新函数

$$h_{\chi_D}(s, z)=h_{\chi_D}(s)=\frac{s-1}{s} \cos\left(\frac{s}{2T}\right)^{-1} f_{\chi_a}(s),$$

则有

$$C_6 |f_{\chi_D}(s)| e^{-\frac{|t|+1}{2T}} \leqslant |h_{\chi_D}(s)|$$

$$\leqslant C_7 |f_{\chi_D}(s)| e^{-\frac{|t|}{2T}},$$

令

$$H(s)=\sum_{\chi_D}|h_{\chi_D}(s)|^2,$$

$$M(\sigma)=\sup_{\mathrm{Re}\,s=\sigma}H(s).$$

则，从引理 2.2 及引理 2.3．得

$$H\left(\frac{1}{2}+it\right)\leqslant C_8e^{-\frac{|t|}{T}}\sum_{\chi_D}\left|f_{\chi_D}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2$$

$$\leqslant C_8e^{-\frac{|t|}{T}}(|t|+1)^2D^{2C}X$$

$$\left(\sum_{\chi_D}\left|\rho_{\chi_D}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2+C_8D\right)$$

$$\leqslant C_8e^{-\frac{|t|}{T}}(|t|+1)^2D^{2C}(z+D\log z).$$

所以得到

$$M\left(\frac{1}{2}\right)=C_9D^{2C}T^2z. \tag{2.9}$$

由引理 2.4 得

$$H(1+\delta+it)\leqslant C_{10}e^{-\frac{|t|}{T}}\sum_{\chi_D}|f_{\chi_D}(1+\delta+it)|^2$$

$$\leqslant C_{11}(\delta^{-2}\log^2z+\frac{D}{z}\delta^{-1}\log^3z).$$

取 $\delta=\frac{1}{\log DT}$，$z=D\log D$，得

$$M(1+\delta)=C_{12}\log^4DT,$$

$$M\left(\frac{1}{2}\right)=C_9D^{1+2C}T^2\log DT.$$

在引理 2.6 中命 $H(s)=F(s)$，$\alpha=1/2$，$\beta=1+\delta$，

则当 $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant1+\delta$ 时，有

$$M(\sigma)\leqslant M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1+\delta-\sigma}{\frac{1}{2}+\delta}} M(1+\delta)^{\frac{\sigma-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\delta}}$$

$$\leqslant C_{13}D^{(2+4c)(1-\sigma)}T^{4(1-\sigma)}\log^{6}DT.$$

这样一来得到

$$M(\Delta-\delta)\leqslant C_{14}D^{(2+4c)(1-\Delta)}T^{4(1-\Delta)}\log^{6}DT. \tag{2.10}$$

由(2.8),(2.10)得到

$$N(\Delta,T,D)\leqslant C_{15}D^{(2+4c)(1-\Delta)}T^{3}\log^{6}DT.$$

定理得证。

定理 2.2. 设 $D\leqslant z^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2}$,若 $L(s,X_D)$任区域(R_1)内不为零

$$1-\frac{C_{16}}{\log^{15}D}\leqslant\sigma\leqslant 1,\quad |t|\leqslant\log^{3}D. \tag{R_1}$$

则

$$\sum_{\chi_D}{}'\left|\sum_{n=1}\chi_D(n)\Lambda(n)e^{-\frac{n}{z}}\right|\leqslant C_{17}ze^{-\varepsilon_3(\log z)^{1/5}}.$$

这里“′”表示求和只对那些使$L(s,X_D)$在(R_1)内不为零的特征$X_D(n)$。

证:

$$\sum_{n=1}^{\infty}X_D(n)\Lambda(n)e^{-\frac{n}{z}}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{L'}{L}(s,X_D)\Gamma(s)z^{s}ds$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty}\frac{L'}{L}(s,\chi_D)\Gamma(s)z^{s}ds+\sum_{\rho_{\chi_D}}\Gamma(\rho_{\chi_D})z^{\rho_{\chi_D}}=\sum_{\rho_{\chi_D}}\Gamma(\rho_{\chi_D})z^{\rho_{\chi_D}}+B\log D.$$

所以

$$\sum_{\chi_D}{}' \left| \sum_{n=1}^{\infty} \chi_D(n) \Lambda(n) e^{-\frac{n}{z}} \right|$$

$$\leqslant \sum_{\chi_D}{}' \sum_{\rho_{\chi_D}} |\Gamma(\rho_{\chi_D})| z^{\beta_{\chi_D}} + BD\log D. \qquad (2.11)$$

而

$$\sum_{\chi_D}{}' \sum_{\rho_{\chi_D}} |\Gamma(\rho_{\chi_D})| z^{\beta_{\chi_D}} \leqslant \sum_{0<\beta<1-\frac{c_{16}}{\log^{4/5} D}} |\Gamma(\rho)| z^{\rho} \leqslant \sum_{\substack{0<\beta<1-\frac{c_{16}}{\log^{4/5} D} \\ |\tau|\le\log^3 D}} |\Gamma(\beta+i\tau)| z^{\beta}$$

$$+ \sum_{\substack{0<\beta<1-\frac{c_{16}}{\log^{4/5} D} \\ |\tau|>\log^3 D}} |\Gamma(\beta+i\tau)| z^{\beta}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta<1-\frac{c_{16}}{\log^{4/5} D} \\ |\tau|\le\log^3 D}} |\Gamma(\beta+i\tau)| z^{\beta} + ze^{-c_3(\log z)^{1/5}}$$

$$\leqslant C_{18}\log^2 z \sum_{\frac{1}{2}\le\Delta\le 1-\frac{c_{16}}{\log^{4/5} D}} N(\Delta, \log^3 D, D) z^{\Delta} + ze^{-c_3(\log z)^{1/5}}$$

$$\leqslant C_{19}\log^{20} z \sum_{\frac{1}{2}\le\Delta\le 1-\frac{c_{16}}{\log^{4/5} D}} \left(\frac{D^{2+c}}{z}\right)^{1-\Delta} + ze^{-c_3(\log z)^{1/5}} \leqslant C_{17} ze^{-c_3(\log z)^{1/5}}.$$

§3

引入下面记号。若

$$D=p_1p_2\cdots p_s,\ p_1>p_2>\cdots>p_s,\ s\leqslant 10\log\log N,$$

则令

$$D=p_1q_1,\ q_1=p_2q_2,\cdots P_{s-2}=p_{s-1}q_{s-1},$$

$$q_{s-1}=p_s.$$

$q_1,q_2,\cdots q_{s-1}$ 称作"D的对角线因子"。

熟知任一特征$X_D(n)$（D无平方因子），可用唯一的方法唯一分解成属于模D的素因子的模，例如若$D=p_1q_1$，则有

$$\chi_D(n)=\chi_{p_1}(n)\chi_{q_1}(n).$$

若$\chi_{p_1}(n)\neq\chi^0_{p_1}(n)$，则称$\chi_D(n)$对$p_1$称为是本原的。

定理 3.1（A. Renyi）[1]。设q无平方因子，$A\geqslant C_{20}$；令

$$k=\frac{\log q}{\log A}+1,$$

若$k\leqslant\log^3 A$，则对所有的素数p，$A<p\leqslant 2A$，除了不超过$A^{3/4}$个属于模$D=pq$的例外L-函数外，当$X_D(n)$对p为本原时，$L(s,X_D)$在下面区域内不为零，

$$1-\frac{C_{21}}{\log^{4/5}D}\leqslant\sigma\leqslant 1,\quad |t|\leqslant\log^3 D.$$

我们还需要下面的几个引理。

引理 3.1.

$$\sum_{\substack{d \leqslant z \\ \nu(d) \geqslant 10\log\log z}} \frac{|\mu(d)|\tau(d)}{\varphi(d)} \leqslant \frac{C_{22}}{\log^5 z}.$$

证：

$$\sum_{\substack{d \leqslant z \\ \nu(d) \geqslant 10\log\log z}} \frac{|\mu(d)|\tau(d)}{\varphi(d)}$$

$$\leqslant 2^{-10\log\log z} \sum_{d \leqslant z} \frac{\tau^2(d)}{\varphi(d)} \leqslant \frac{C_{22}}{\log^5 z}.$$

容易证明下面的引理.

引理 3.2. 设$\{p^*\}$为一素数序列，具有下面的性质：任任一区间（$A, 2A$）内含有不大于 $A^{3/4}$ 个元素，则有

$$\sum_{p^* > M} \frac{1}{p^* - 1} \leqslant \frac{C_{23}}{M^{1/4}}.$$

引理 3.3.

$$\sum_{p > N} x_D(p) \log p \cdot e^{-\frac{p\log N}{N}} \leqslant C_{24} N^{\frac{1}{2}}.$$

引理 3.4.

$$\sum_{p \leqslant N} x_D(p) \log p \cdot e^{-\frac{p\log N}{N}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x_D(n) \Lambda(n)\, e^{-\frac{n\log N}{N}} + BN^{\frac{1}{2}}.$$

引理3.5.对所有的$D \leqslant \exp(C_{25}\sqrt{\log N})$，除了某个$\tilde{D}$的倍数外，对$(l, D) = 1$，有

$$\sum_{\substack{p \leqslant N \\ p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, D)}} \log p \cdot e^{-\frac{p\log N}{N}}$$

$$= \frac{N}{\varphi(D)\log N} + BNe^{-C_{26}\sqrt{\log N}}. \qquad (3.1)$$

对于 $\widetilde{D}|D$,则在(3.1)内还必须加上项

$$\frac{BN^{1-\frac{C(\varepsilon)}{D^{\varepsilon}}}}{\varphi(D)},$$

这里 $\varepsilon>0$，是在意的，$C(\varepsilon)$ 是依赖于 ε 的正数。

引理 3.6. 对 $D<\sqrt{N}$，下式一致成立：

$$p_1(N, D, l)<\frac{C_{27}N}{\varphi(D)}.$$

现考虑 $D=p_1p_2\cdots p_s\leqslant N^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2}$，$p_1>p_2>\cdots>p_s, s\leqslant 10\log\log N$，有 $D>\exp(\log N)^{2/5}$，则

$$p_1>D^{\frac{1}{v(D)}}>\exp(\log N)^{\frac{1}{3}}. \qquad (3.2)$$

另一方面有

$$q_1<p_1^{v(D)}<p_1^{10\log\log N},$$

所以

$$k_1=\frac{\log q_1}{\log\frac{p_1}{2}}+1<11\log\log N. \qquad (3.3)$$

对固定的 q_1 利用定理 3.1 到(3.2)，我们只要考虑区间 $(A,2A)$，这里 $A=2^k l(k=0,1,2,\cdots)$.

$$l=\exp(\log N)^{\frac{1}{3}}.$$

我们称 $D>\exp(\log N)^{2/5}$ 为"条件 1"，其次假如 p_1 是 D 的最大素因子，$D=p_1q_1$ 则 p_1 对 q_1 不是例外的（在定理 3.1 的意义下）。这个我们称为"条件 2".

假若两个条件都满足，则由定理 2.2,3.1 及引理 3.3,

3.4 得到.

$$P_1(N,D,l)=\frac{1}{\varphi(P_1)}P_1(N,q_1,l)$$

$$+\frac{BN}{\varphi(D)}\exp[-\varepsilon_3(\log N)^{\frac{1}{3}}]. \qquad (3.4)$$

若 $q_1=p_2q_2$ 亦满足条件 1,及 2, 则我们得到

$$P_1(N.D,l)=\frac{1}{\varphi(p_1p_2)}P_1(N,q_2,l)$$

$$+\frac{BN}{\varphi(D)}\exp(-\varepsilon_3(\log N)^{1\cdot 5}). \qquad (3.5)$$

假若对某个 m 破坏了条件 1, 即 $q_m<\exp(\log N)^{2/5}$, 则由引理 3.5 得

$$p_1(N,D,l)=\frac{1}{\varphi(D)}\frac{N}{\log N}+\frac{BN}{\varphi(D)}$$

$$\exp(-\varepsilon_3(\log N)^{1\cdot 5})+E_1(q_m)\frac{N^{1-\frac{C(\varepsilon)}{\tilde{p}^{\varepsilon}}}}{\varphi(D)}, \quad (3.6)$$

这里

$$E_1(q_m)=\begin{cases}1, & D\mid q_m,\\ 0, & D\times q_m.\end{cases}$$

若破坏了条件 2, 即 p_{m+1} 对q_{m+1}而言是例外素数, 则由引理 3.6 得

$$P_1(N,D,l)=\frac{BN}{\varphi(D)}. \qquad (3.7)$$

由引理 3.1 得

$$\sum_{d\leqslant\lambda^{\frac{1}{3}-2}}|\mu(d)\tau(d)Rd(N)|$$

$$\leqslant \sum_{\substack{d\leqslant N^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2}\\ V(d)\leqslant 10\log\log N}} |\mu(d)\tau(d)Rd(N)|$$

$$+\sum_{\substack{d\leqslant N^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2}\\ V(d)>10\log\log N}} |\mu(d)\tau(d)Rd(N)|$$

$$=\sum_{\substack{d\leqslant N^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2}\\ V(d)\leqslant 10\log\log N}} |\mu(d)\tau(d)Rd(N)|$$

$$+\frac{BN}{\log^5 N}. \tag{3.8}$$

由(3.6),(3.7)及引理 3.2 得

$$\sum_{\substack{d\leqslant N^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2}\\ V(d)\leqslant 10\log\log N}} |\mu(d)\tau(d)Rd(N)|$$

$$\leqslant\Big(\sum_{d\leqslant N^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2}}\frac{|\mu(d)|\tau(d)}{\varphi(d)}\Big)Ne^{-c_3(\log N)^{1/5}}$$

$$+\frac{\tau(d)}{\varphi(d)}N^{1-\frac{c(\varepsilon)}{d^{\varepsilon}}}\Big(\sum_{d\leqslant N}\frac{\tau(d)}{\varphi(d)}\Big)^2$$

$$+N\sum_{d\leqslant N}\frac{\tau(d)}{\varphi(d)}\sum_{p^*>e^{(\log N)^{\frac{1}{3}}}}\frac{1}{p^*-1}$$

$$\leqslant\frac{N}{\log^5 N}. \tag{3.9}$$

由(3.8),(3.9)基本定理得证.

编者注：因由基本定理及前面王元文章的附录，我们可以推出(1，4)，所以我们略去本文的其余部分。

14. 狄里希勒L-函数的零点“密度”及素数与“殆素数”之和问题

巴 尔 巴 恩

命$\pi(x,D,l)$表示区间$(1,x)$中的素数满足$\equiv l(\bmod D)$者之个数。本文，对于$(l,D)=1$及“几乎”所有$D\leqslant x^{3/8-\varepsilon}$，我们将证明关于$\pi(x,D,l)$的一条中值公式，此后我们用$\varepsilon$表示任意给定正数。

定理1. 给予任意大数A，不等式

$$\sum_{D\leqslant x^{3/8-\varepsilon}}\mu^2(D)\max_{\substack{l(\bmod D)\\(l,D)=1}}\left|\pi(x,D,l)-\frac{li\,x}{\varphi(D)}\right|$$

$$=O\left(\frac{x}{\log^A x}\right)\tag{1}$$

成立。

由定理1及赛尔贝格筛法可得

定理2. 每个充分大的偶数为一个素数及一个不超过4个素数的乘积之和。

我们将这个问题的历史叙述如下：

在1947年，瑞尼〔1,2〕证明了下面的定理，它是对于未解决的两项哥德巴赫猜想的重要逼近结果：

存在一个绝对常数R使每一大偶数都是一个素数及一个素因子个数不超过R的殆素数之和。

瑞尼定理中的常数R依赖于林列克〔3〕中某些分析引理中的一系列常数，估计R需要复杂的计算，而其值将是很

大的。

用瑞尼的方法及狄里希勒 L-级数零点“密度”的某些近代结果，作者〔4〕证明了如果求和范围为 $D\leqslant x^{1/6-\varepsilon}$，则定理 1 的结论成立，并由此推出 $R=9$。注意，在假定广义黎曼猜想之下，$R=3$ 已经证明了（见〔5〕）。

进一步的进展与 L-级数的“密度”定理的精密化相关联。

命 $N(\alpha,T)$ 表所有 $\bmod D$ 的 L-函数在区域

$$\alpha<\sigma<1,\quad |t|\leqslant T \tag{2}$$

中的零点个数，此处多重零点将计算其重数。

文章〔4〕的方法表明求和范围为 $D\leqslant x^{\frac{1}{a}-\varepsilon}$ 的关系式(1)可以由下面的估计推出来：

$$N(\alpha,T)\ll T^{c_1}D^{a(1-\alpha)}\log^{c_2}DT, \tag{3}$$

此处 a,c_1,c_2 为绝对常数。

用林尼克的新“离差法”证明了梯其玛奇的除数问题〔6〕与哈代—李特伍德问题〔7〕。我们很有兴趣地注意到在这些问题的著名条件解决〔8,9〕中，黎曼猜想可以换成“密度”猜想，即(3)对于 $a=2$ 成立。

在〔4〕中，我们用了塔吐沙娃的“密度”定理，由它得到(3)式，其中 $a=6$。

我们的定理 1 的获得基于改进的塔吐沙娃定理及林尼克〔7〕关于 L-级数在半直线上六次矩的估计的一条深刻定理。

我们从下面的预备定理开始。

引 1. 命 $0\leqslant\alpha<\beta<2$。命 $f(s)$ 为一个解析函数，当 s 为实值时亦取实值，当 $\sigma\geqslant\alpha$ 时，除 $s=1$ 外为正则的。又命 $|Ref(2+it)|\geqslant m>0$ 及

$$|f(\sigma'+it')|\leqslant M_{\sigma,t}(\sigma'\geqslant\sigma,1\leqslant t'\leqslant t).$$

则若T非$f(s)$的零点的纵坐标，当$\sigma\geqslant\beta$时有$|\arg f(\sigma+iT)|$

$$\leqslant\frac{\pi}{\log\left\{\dfrac{2-\alpha}{2-\beta}\right\}}\left(\log M_{\alpha,T+2}+\log\frac{1}{m}\right)+\frac{3\pi}{2}.$$

关于证明，我们引用文献，例如，〔11〕,pp.210－211.

我们引入下面的记号：

$$Q_z(s,\chi)=\sum_{n\leqslant z}\mu(n)\chi(n)n^{-s},$$

$$f_z(s,\chi)=L(s,\chi)Q_z(s,\chi)-1,$$

$$h_z(s,\chi)=1-f_z^2(s,\chi),$$

$$K_z(\sigma,T)=\max_{|t|\leqslant T}\sum_{\chi}|f_z(\sigma+it,\chi)|^2.$$

$L(s,\chi)$所有的零点亦是$h_z(s,\chi)$的零点．因此$N(\alpha,T)\leqslant N_1(\alpha,T)$，此处$N_1(\alpha,T)$表示$H_z(s)=\prod_{\chi}h_z(s,\chi)$在区域(2)中的零点个数．将熟知的李特伍德定理用于这个函数．因$N_1(\alpha,T)$当α递增时亦递增，所以

$$N_1(\alpha,T)\leqslant\delta^{-1}\int_{\alpha-\delta}^{\alpha}N_1(\sigma,T)d\sigma\leqslant\delta^{-1}\int_{\alpha-\delta}^{2}N_1(\sigma,T)d\sigma=\frac{\delta^{-1}}{2\pi}\int_{-T}^{T}\{\log|H_z(\alpha-\delta+it)|-\log|H_z(2+it)|\}dt+\frac{\delta^{-1}}{2\pi}\int_{\alpha-\delta}^{2}\{\arg H_z(\sigma+iT)-\arg H_z(\sigma-iT)\}d\sigma+O(\delta^{-1}).\qquad(4)$$

此处量δ将于以后确定．

以下将假定D充分大，及$z\geqslant D$．

当 $\sigma>1$ 时我们有

$$f_z(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\sum_{\substack{d\mid n\\ d<z}}\mu(d)\chi(d)\chi\left(\frac{n}{d}\right)-1$$

$$=\sum_{n\geqslant z}\chi(n)n^{-s}\sum_{\substack{d\mid n\\ d<z}}\mu(d)=\sum_{n\geqslant z}\chi(n)a_n n^{-s},$$

$$|a_n|\leqslant\tau(n),$$

此处 $\tau(n)$ 表示 n 的因子个数.

因对于任意 ε 皆有 $\tau(n)=O(n^{\varepsilon})$, 我们得

$$|f_z(2+it,\chi)|\leqslant\sum_{n\geqslant z}\tau(n)n^{-2}$$

$$\leqslant\sum_{n\geqslant D}n^{0.1}n^{-2}<D^{-0.8}.$$

现在将引1用于(4), 并且

$$f(s)\to H_z(s),\ \alpha\to(\alpha-2\delta),\ \beta\to(\alpha-\delta).$$

因 $H_z(s)$ 的狄里希勒级数有正系数, 所以当 s 为实数时, $H_z(s)$ 亦然 (见[10],p.301) . 其次

$$\begin{aligned}ReH_z(2+it)&=Re\prod_{\chi}\{1-f_z^2(2+it,\chi)\}\\&=1+Re\{\prod_{\chi}(1-f_z^2)-1\}\geqslant1-\\&|\prod_{\chi}(1-f_z^2)-1|\geqslant1-\{\prod_{\chi}\\&(1+|f_z|^2)-1\}\geqslant1-\{\prod_{\chi}(1+D^{-1.6})\\&-1\}\geqslant2-(1+D^{-1.6})^D\geqslant\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

所以 m 可以取为1/2. 最后

$$|H_z(s)|\leqslant\prod_{\chi}(1+|f_z(s,\chi)|^2)$$

$$\leqslant\exp\sum_{\chi}|f_z(s,\chi)|^2.$$

因此 $M_{\sigma,t}$ 可以取作 $\exp\max\limits_{\sigma<\sigma'\leqslant2}K_z(\sigma',t)$.

我们还有，$|H_z(2+it)|\geqslant ReH_z(2+it)\geqslant\frac{1}{2}$，所以综合上述估计，我们有下面的引理。

引 2．若 $z\geqslant D$，则

$$N(\alpha,T)\ll\delta^{-2}T\max_{(-3)<\sigma<2}K_z(\sigma,T+2).$$

为了估计 $K_z(\sigma,T)$，我们需用解析函数的凸定理的经典方法，我们从 $K_z(1+\delta,T)$的估计开始。

引 3．若 $z\geqslant D$ 及 $0<\delta\leqslant 3$，则

$$K_z(1+\delta,T)\ll\delta^{-5}.$$

证：我们有

$$\sum_{\chi}|f_z(1+\delta+it,\chi)|^2$$

$$=\sum_{m,n\geqslant z}\sum_{\substack{(m,D)=1\\ n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,D)}}\frac{\varphi(D)}{(mn)^{1+\delta}}\sum_{\substack{d\mid m\\ d<z}}\mu(d)\sum_{\substack{d\mid n\\ d<z}}\mu(d)$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{it}$$

$$\leqslant\varphi(D)\sum_{\substack{m\geqslant z\\ (m,D)=1}}\frac{\tau(m)}{m^{1+\delta}}\sum_{\substack{n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,D)\\ n\geqslant z}}\frac{b_z(n)}{n^{1+\delta}},$$

此处 $b_z(n)=\sum_{\substack{d\mid n\\ d\geqslant n/z}}1$.

因$(m,D)=1$，我们有

$$\sum_{n\leqslant x}b_z(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,D)}}\sum_{\substack{d\mid n\\ d\leqslant n/z}}1=\sum_{d<x/z}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,D)\\ n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)}}1$$

$$\ll\sum_{d<x/z}\left(\frac{x}{Dd}+1\right)\ll\frac{x}{D}\log x+\frac{x}{z}\ll\frac{x\log x}{D},$$

所以

$$K_z(1+\delta,T) \ll \frac{\log z}{z^{\delta}\delta^{2}}\sum_{m\geq z}\frac{\tau(m)}{m^{1+\delta}}$$

$$\ll \frac{\log z}{z_{\delta}\delta^{2}}\zeta^{2}(1+\delta) \ll \frac{\log z}{z^{\delta}\delta^{4}}.$$

因 $\delta\log z \ll z^{\delta}$，故得引理．

引 4．命 $z=D$ 及对于所有 $\chi(\bmod D)$有

$$\max_{|t|\leq T}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right| \leq MT^{c_0}. \text{ 则}$$

$$K_z\left(\frac{1}{2},T\right) \ll M^2T^{2c_0}\varphi(D)\log D.$$

证：显然

$$K_z\left(\frac{1}{2},T\right) \ll M^2T^{2c_0}\max_{|t|\leq T}\sum_{\chi}\left\{\left|Q_z\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2+1\right\} \ll M^2T^{2c_0}\max_{|t|\leq T}\varphi(D)$$

$$\sum_{\substack{m,\,n<z\\ n\equiv m(\bmod D)}}\ \sum_{(m,D)=1}\frac{\mu(m)\mu(n)}{(mn)^{1/2}}\left(\frac{m}{n}\right)^{it}.$$

因 $z=D$，将同余式变成等式即得引理．

引 5．命 $z=D$及 $T\geq 2$．则在引 4 的假定下，有

$$K_z(\sigma,T) \ll \begin{cases} T^{2c_0}\{M^2D^2\}^{2(1-\sigma)}\log^5 D\left(\frac{1}{2}\leq\sigma\leq 1\right), \\ \log^5 D(1\leq\sigma\leq 4). \end{cases}$$

证：由解析函数的凸定理（见[10]，pp.309-310）及引 3 与引 4 可知，当$\frac{1}{2}\leq\sigma\leq 1+\delta$时有

$$K_z(\sigma,T) \ll \{M^2T^{2c_0}\varphi(D)\log D\}^{\frac{1+\delta-\sigma}{\frac{1}{2}+\delta}}\delta^{-\frac{5(\sigma-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}+\delta)}}.$$

命 $\delta=\frac{1}{\log D}$. 则由 L-级数熟知的估计，即 $M \ll D^{1/2}$ 可以推出引理的第一部分。由引 3 即得第二部分。

基本引理。假定对于所有 $\chi(\bmod D)$ 皆有

$\max_{|t|\leqslant T}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right| \leqslant MT^{c_0}$。则

$$N(\alpha,T) \ll T^{1+2c_0}\{M^2D\}^{2(1-\ )}\log^7 D.$$

若 $\alpha>\frac{1}{2}+\frac{3}{\log D}$，则由引 2 与引 5 可得引理。

若 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}+\frac{3}{\log D}$ 则由粗略估计 $N(\alpha,T) \ll DT \log DT$ 即得引理。

特别，置 $M=D^{\frac{1}{4}}\log D$。则由 L—级数的“渐近函数方程”可知 M 的这种选取是可能的。例如，见〔12〕。故得(3)，其中 $a=3$。

对于“几乎所有”D，由林尼克关于 L-级数的六次矩的估计可得一个相当精密的结果。这将在以后被使用。

由我以前的工作可知由(3)，其中 $a=8/3-\varepsilon$，即可推出定理 1。

由林尼克关于 L-级数的六次阶的估计（见〔7〕）：

$$\sum_{D_1\leqslant D\leqslant D_1\left(1+\frac{1}{\log^{20} D_1}\right)}\sum_{\chi_D}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi_D\right)\right|^8$$

$$\ll D_1^2(|t|+1)^{C_0}\exp(\log D_1)^8,$$

我们立刻得

引 6。在区间 $D_1\leqslant D\leqslant D_1\left(1+\frac{1}{\log^{20} D_1}\right)$ 中最多除去

$D_1^{1-\varepsilon}$ 个 D，我们有

$$\max_{\chi(\bmod d)} \left| L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right) \right| \ll D^{\frac{1}{6}+\varepsilon}(|t|+1)^{c_0}.$$

因此若 D 非引 6 意义下被“除去”的，则由基本引理可得(3)式，其中 $a=8/3+\varepsilon$。〔4〕中的结果说明只要考虑 $D>x^{1/7}$ 的情况即足。

命 Σ' 表示 D 的一个和，此处 D 表示引 6 意义下被“除外”者。则

$$\sum'_{x^{\frac{1}{7}}<D<x^{3/8-\varepsilon}} \mu^2(D) \max_{\substack{l(\bmod D)\\(l,D)=1}} \left| \pi(x,D,l) - \frac{lix}{\varphi(D)} \right| \ll \sum'_{x^{\frac{1}{7}}<D<x^{3/8-\varepsilon}} \frac{x}{D}$$

$$\ll x \sum_{n<\log^{22}x} \sum_{x^{\frac{1}{7}}\left(1+\frac{1}{\log^{20}x}\right)^n<D<x^{\frac{1}{7}}\left(1+\frac{1}{\log^{20}x}\right)^{n+1}} \frac{1}{D} \ll x \sum_{n<\log^{22}x} \frac{1}{x^{\frac{1}{7}}\left(1+\frac{1}{\log^{20}x}\right)^n}$$

$$\sum_{x^{\frac{1}{7}}\left(1+\frac{1}{\log^{20}x}\right)^n<D<x^{\frac{1}{7}}\left(1+\frac{1}{\log^{20}x}\right)^{n+1}} 1$$

$$\ll \frac{x}{\log^4 x}.$$

定理 1 证完。

由定理 1 及王元〔5〕或列文〔16〕形式的赛尔贝格筛法可推出定理 2。

定理 3. 区间$(2,N)$中的孪生素数对，即 p 与 $p+2$ 同

时为素数，的个数不超过

$$\left(\frac{16}{3}+\varepsilon\right)2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{N}{\log^2 N}, \qquad (5)$$

此处 $N\geqslant N(\varepsilon)$。

过去的最佳记录是属于赛尔贝格〔13〕的，在他的结果中，(5)式中的$\frac{16}{3}$需换成 8。令人感兴趣的是赛尔贝格曾断言他的结果是用“纯”筛法所能达到的极限。

在此，我们可以用阿．依．维诺格拉朵夫〔15〕方法证明、或者在定理 3 对于用 $4-2^{\varepsilon}$ 代替 16/3 成立，或者存在无穷多个素数 p 使 $p+2$ 最多为 2 个素数的乘积。

现在我们给赛尔贝格筛法以下面的形式。

引 7。命 $a_1,\cdots,a_N$ 为一个整数集合满足

$$\sum_{a_n\equiv 0\,(\bmod d)} 1=\frac{N}{f(d)}+R_d,$$

此处 $f(d)$为积性函数及 $p/f(p)=0(1)$。若我们用 N_z 表示不被$\leqslant z$ 的素数整除的 a_n 的个数，则

$$N_z\leqslant\frac{N}{\sum\limits_{m\leqslant z}\frac{\mu^2(m)}{f_1(m)}}+O\left\{(\log\log z)^c\sum_{d\leqslant z^2}\right.$$

$$\left.\mu^2(d)R_d|\tau(d)\right\},$$

此处 $f_1(m)$表示 $f(m)$的麦比乌斯变换及 $\tau(m)$表示 m 的因子个数。

关于赛尔贝格方法的全面阐述可以参看例如〔10〕。为了从引 7 推出定理 3，我们取$\{a_n\}$为集合$\{p-2\}$，此处 p 过所有

$\leqslant N$ 的素数，及 $z=N^{3/16-\varepsilon}$。

主项可以用熟知的方法来计算，例如见〔14〕。误差项为和

$$\sum_{\substack{d<N^{3/8-\varepsilon}\\ d\equiv 1(\bmod 2)}} \mu^2(d)\left|\pi(N,d,2)-\frac{liN}{\varphi(d)}\right|\tau(d).$$

由定理 1 可知满足 $\tau(d)\leqslant\log^{\frac{A}{2}}N$ 的 d 构成的部分和 $\ll N/\log^{\frac{A}{2}}N$。其余部分则

$$\ll \sum_{\substack{d<N^{3/8-\varepsilon}\\ \tau(d)>\log^{\frac{A}{2}}N}} \frac{N}{d}\mu^2(d)\tau(d)$$

$$\leqslant N\sum_{d<N^{3/8-\varepsilon}} \frac{\mu^2(d)}{d}\tau(d)\frac{\tau(d)}{\log^{\frac{A}{2}}N} \ll \frac{N}{\log^{\frac{A}{2}-5}N}.$$

因 A 可以任意大，故定理成立。

*)校稿时注，定理 1 是作者于 196[illegible] 年证明的。用这条定理来估计瑞尼的常数 R，我们征引王元的文章〔5〕，这是赛尔贝格“线性”筛法的已知最佳结果。〔5〕是用中文发表的，应用这个方法时需复杂的计算，列文友好地告诉我，$R\leqslant 4$ 可以由他关于赛尔贝格新方法与定理 1〔16,17〕中推出来。然后王元〔5〕又肯定了由定理 1 及他的工作可导出同样的结论，王元的工作的详细阐述发表于〔5〕的英文翻译本所加的附录之中，我已注意到与定理 1 相类似的结果已由潘承洞独立地证明了，但他的结果不是用术语 $\pi(x,D,l)$ 来表述的，而是用一个“加权”和，由此可以推出定理 2，但不能推出定理 3。

作者感谢王元与列文，他们系统地与友好地将他们的结

果告诉了我。

参 考 文 献

〔1〕 A.Renyi,Izv.Akad.Nauk SSSR,Ser.Mat;12, 1948, 57—78.

〔2〕 A.Renyi,Dokl.Akad.Nauk SSSR,56,1947,455—458.

〔3〕 Ju.V.Linnik,Mat.Sbornik,57,1944,3—12.

〔4〕 M.B.Barban,Trudy Inst.Mat.Akad.Nauk UzSSR, 22,1961,1—20

〔5〕 Wang Yuan,Acta Math.Sinica,10,1960,168—181.

〔6〕 Ju.V.Linnik,Dokl.Akad.Nauk SSSR,137,1961,1299—1302.

〔7〕 Ju.V.Linnik,Izv. Akad.Nauk SSSR,Ser. Mat;24, 1960,629—706.

〔8〕 E.Titchmarsh, Rend.Cir.Mat.Palermo, 54.1930, 414—429.

〔9〕 C.Hooley,Acta Math;97,1957,189—210.

〔10〕 K.Prachar,Primzahlverteilung, Springer Verlag, 1957.

〔11〕 E.Titchmarsh,The theory of the Riemann zeta function,Clarendon Press,Oxford,1951.

〔12〕 Ju.V.Linnik,Mat.Sbornik,53,1961,3—83.

〔13〕 A.Selberg,Den 11—te Skan. Mat. Kong;1949,13—22.

〔14〕 N.E.Klimov,Usp.Mat.Nauk,3,1958,145—164.

〔15〕 A.I.Vinogradov,Vest.Leningrad Univ;7,1959, 26—31.

〔16〕 B.V.Levin, Dokl.Akad.Nauk UzSSR, 11, 1962, 7—9.
〔17〕 B.V.Levin, Mat.Sbornik, 61, 1963, 389—407.
〔18〕 Wang Yuan, Sci.Sinica, 11, 1962, 1033—1054.

15. 哥德巴赫-欧拉问题与孪生素数问题研究的新结果

希赫夕塔希

关于表偶数为两个素数之和的哥德巴赫-欧拉问题至今尚未解决。由埃拉朵斯染尼氏筛法及林尼克与其后继者所发展的狄里希勒L—级数理论可以证明存在一个整数k使每个大偶数$2N$均可以表示为$2N=p+n$，此处p为一个素数及n最多只有k个素因子。瑞尼〔1〕首先证明了k的存在性。$k=4$是由列文、巴尔巴恩、王元与潘承洞〔2，3，4〕得到的。对于孪生素数问题，他们也得到了类似结果，即存在无穷多个素数p使$p+2$最多k个素因子。本文，我将证明$k=3$。

定理1. 存在N_0使每个大于N_0的偶数都可以表成一个素数及一个素因子个数不超过3的殆素数之和。

定理2. 存在无穷多个素数p使$p+2$为一个不超过3个素数的乘积。

证明基于下面的巴尔巴恩定理。

定理A. 命ν为一个小于8/3的数及A为一个正常数。则

$$\sum_{D<x^{\nu}}\mu^2(D)\max_{\substack{a(\bmod D)\\(a,D)=1}}\left|\pi_a(x,D)-\frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(D)}\right|=O\left(\frac{x}{\ln_A x}\right).$$

此处$\pi_a(x,D)$表示适合$p\leqslant x$及$p\equiv a(\bmod D)$的素数个数，$\varphi(D)$为欧拉函数及$\mu(D)$为麦比乌斯函数。

定理2的证明。注意习知定理1可以用类似的方法来证明。

命q为一个整数及$2<p_1<\cdots<p_r$为素数列，此处$p_i\nmid q$与$p_r\leqslant z<p_{r+1}$。命$a,a_1,\cdots a_r$为一个整数集合满足$(a,q)=1$及$p_i\nmid a_i$，我们将它们记为ω。我们用$P_\omega(x,q,z)$表示适合$p\equiv a(\bmod q)$与$p\not\equiv a_i\ (\bmod p_i)\ (1\leqslant i\leqslant r)$的素数$p$的个数，则由布朗方法可以证明

定理B。存在非递减函数$\lambda(\alpha)$与$\Lambda(\alpha)$使当$\alpha>0$及$q<x^\nu$时有

$$
\begin{aligned}
P_\omega\left(x,q,\left(\frac{x^\nu}{q}\right)^{1/\alpha}\right)>\Bigl\{&B_0\lambda(\alpha)+O\\
&\left(\frac{1}{(\nu\ln x-\ln q)^{1/2}}\right)\Bigr\}\frac{c(q)\mathrm{li}(x)}{\nu\ln x-\ln q}-r_\omega\\
&\left(x,q,\left(\frac{x^\nu}{q}\right)^{1/\alpha}\right),\\
P_\omega\left(x,q,\left(\frac{x^\nu}{q}\right)^{1/\alpha}\right)<\Bigl\{&B_0\Lambda(\alpha)+O\\
&\left(\frac{1}{(\nu\ln x-\ln q)^{1/2}}\right)\Bigr\}\frac{c(q)\mathrm{li}(x)}{\nu\ln x-\ln q}+r_\omega\\
&\left(x,q,\left(\frac{x^\nu}{q}\right)^{1/\alpha}\right),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

此处B是一个与ω无关的常数；当$\alpha\geqslant10$时，$\lambda(\alpha)>0$，$c(q)=\frac{1}{\varphi(q)}\prod_{\substack{p\mid q\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}$，及

$$r_{\omega}\left(x,q,\left(\frac{x^{\nu}}{q}\right)^{1/\alpha}\right)<\sum_{D\in\Omega}\mu^{2}(D)\max_{\substack{a \pmod D\\ (l,a)=1}}$$

$$\left|\pi_{a}\left((x,D)-\frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(D)}\right|,\qquad (2)$$

其中区域 $\Omega=\Omega\left(x,q,\left(\frac{x_{\nu}}{q}\right)^{1/\alpha}\right)$ 包括满足 $D=qm$，$m<x^{\nu}/q$ 及 m 的最大素因子小于 $(x^{\nu}/q)^{1/\alpha}$ 的诸数 D。

我们得到通常的公式 $\lambda(\alpha)$ 与 $\Lambda(\alpha)$。每隔步长 0.01，给出 $\Lambda(\alpha)$ 一个值。此处 $\alpha\leqslant 10$。取 $\lambda(10)=9.999942$。这些值是以列宁命名的莫斯科师范大学的“明斯克 1”计算机上算出来的，这样就定义了两个阶梯函数 $\Lambda_0(\alpha)$ 与 $\lambda_0(\alpha)$ 之值，其中当 $\alpha<10$ 时，$\lambda_0(\alpha)=0$。由王元的工作表明，用布赫夕塔布方法可以证明下面的定理。

定理 C。命 $\beta>1$。若 $\Lambda(\alpha)$ 与 $\lambda(\alpha)$ 换为

$$\bar{\lambda}(\alpha)=\begin{cases}\max\left(\lambda(\alpha),\lambda(\beta)-\displaystyle\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\frac{\Lambda(z)}{z}dz\right), & \text{当}1<\alpha\leqslant\beta\\ \lambda(\alpha), & \text{当 }0<\alpha\leqslant 1\text{ 或 }\alpha>\beta;\end{cases}$$

与 (3)

$$\bar{\Lambda}(\alpha)=\begin{cases}\min\left(\Lambda(\alpha),\Lambda(\beta)-\displaystyle\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\frac{\lambda(z)}{z}dz\right) & \text{当}1<\alpha\leqslant\beta,\\ \Lambda(\alpha), & \text{当 }0<\alpha\leqslant 1\text{ 或 }\alpha>\beta,\end{cases}$$

则不等式(1)仍然成立，此处误差项满足(2)并具有同样的Ω。

从 $\lambda_0(\alpha)$ 与 $\Lambda_0(\alpha)$ 出发，由(3)可得区间 $0<\alpha\leqslant 10$ 上的函数贯：

$$\lambda_0(\alpha)\leqslant\lambda_1(\alpha)\leqslant\lambda_2(\alpha)\leqslant\cdots\leqslant\Lambda_2(\alpha)\leqslant\Lambda_1(\alpha)\leqslant\Lambda_0(\alpha).$$

在同样的计算机上连续迭代，我们得一张表，具有足够

多的 $\lambda(\alpha)$ 与 $\Lambda(\alpha)$ 的值，此处为简单计，我们略去了足标，特别地，我们得到下列诸值

α	$\alpha\leqslant 3$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
$\Lambda(\alpha)$	3.580161	3.58619	3.60711	3.64053	3.68437	3.73696
α	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1
$\Lambda(\alpha)$	3.79694	3.86318	3.93473	4.01079	4.09072	4.17392
α	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7
$\Lambda(\alpha)$	4.25994	4.34834	4.43877	4.53094	4.62455	4.71940
α	4.8	4.9	5.0			
$\Lambda(\alpha)$	4.81526	4.91197	5.00938			

下面的定理可用证明定理 C 的方法类似地来证明.

定理 D. 命 $3/8\nu<\alpha\leqslant\beta$ 及 $\nu_1<\nu$. 则

$$\sum_{x^{3/8\beta}\leqslant p<x^{3/8\alpha}} P_\omega(x,p,p)<\frac{B_0}{\nu_1}\cdot\frac{\mathrm{li}(x)}{\ln x}\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\frac{\Lambda(z)}{z}dz+O\left(\frac{x}{\ln^{5/2}x}\right). \tag{4}$$

定理 E. 命 $3/8\nu<\alpha\leqslant\beta\leqslant\delta$ 及 $\nu_1<\nu$. 则

$$\sum_{x^{3/8\beta}\leqslant p<x^{3/8\alpha}} P_\omega(x,p,x^{3/8})<\frac{\beta_0}{\nu_1}\cdot\frac{\mathrm{li}(x)}{\ln x}\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\Lambda\left(\frac{\delta z}{z+1}\right)\frac{dz}{z}+O\left(\frac{x}{\ln^{5/2}x}\right). \tag{5}$$

当 $4\leqslant n\leqslant 10$ 时，考虑区间 $I_n=[x^{n/64},x^{(22-n)/64}]$；当 $18\leqslant n\leqslant 20$ 时，考虑 $I_n=[x^{n/64},x^{(n+1)/64}]$；当 $4\leqslant n\leqslant 10$ 时，考虑 $L_n=[x^{n/64},x^{(n+1)/64}]$. 假定 c_n 与 d_n 对应于 I_n 与 L_n，此处 $c_4=4/21$；当 $5\leqslant n\leqslant 10$ 时，$c_n=1/21$，当 $18\leqslant n\leqslant 20$ 时，$c_n=(21-n)/n$；及 $d_n=(21-2n)/21$. 考

虑函数 $P(x,q,z)=P_\omega(x,q,z)$，此处 a 及 a_i 均取作 -2。

定理 F。命 $G(x)$ 表示 $p<x-2$ 且满足下面条件的素数 p 的个数：1）$p+2\not\equiv 0(\bmod p_i)(p_i<x^{1/16})$；及 2）$p+2$ 最少有 4 个互不相同的素因子，这种素数的集合记为 G。命

$$S(x)=\sum_{4\leqslant n\leqslant 10} c_n \sum_{p_i\in I_n} P(x,p_i,x^{n/64}) + \sum_{18\leqslant n\leqslant 20} c_n \sum_{p_i\in I_n} P(x,p_i,x^{1/16}) + \sum_{4\leqslant n\leqslant 10} d_n \sum_{p_i\in L_n} P(x,p_i,p_i)。\quad (6)$$

则 $G(x)\leqslant S(x)$。

命 M 表示适合下面条件的诸素数：$p<x-2$ 及 $p+2\not\equiv 0(\bmod p_i)(p_i<x^{1/16})$。对于每个 $p+2$，此处 $p\in G$ $(G\subset M)$，它可以表成 $p+2=p_\alpha^{(k1)}p_\beta^{(k2)}p_\gamma^{(k3)}p_\delta^{(k4)}m$，此处 $p_\alpha^{(k1)}<p_\beta^{(k2)}<p_\gamma^{(k3)}<p_\delta^{(k4)}$ 为 $p+2$ 的四个最小互异的素因子，当 $4\leqslant t\leqslant 10$ 时，记 $x^{t/64}\leqslant p^{(t)}<x^{(t+1)/64}$；及 $x^{21/64}\leqslant p^{(21)}<x$。则 $S(x)=\sum_{p\in M}T(p)$，此处

$$T(p)=\sum_{p_i\mid(p+2)}\sum_{\substack{4\leqslant n\leqslant 10\\ p_i\in I_n,\ p\in M_n}} c_n+\sum_{p_i\mid(p+2)}\sum_{\substack{18\leqslant n\leqslant 20\\ p_i\in I_n}} c_n+d(p),$$

$p\in M_n$ 表示 $p+2\not\equiv 0(\bmod p_i)(p_i\leqslant x^{n/64})$；当 $p_\alpha^{(k1)}\in L_n$ $(4\leqslant n\leqslant 10)$ 时，$d(p)=d_n$，否则 $d(p)=0$。

对于 $p\in G$，在和 $T(p)$ 中取 e_n 及 $d_n=d(p)$，此处 p_i 为 $p_\alpha^{(k1)}p_\beta^{(k2)}p_\gamma^{(k3)}p_\delta^{(k4)}$ 的素因子，则得其值 $U(p)\leqslant T(p)$

为了证明定理，只要能证明对于所有 $p \in G, U(p) \geqslant 1$ 即足。事实上

$$S(x) \geqslant \sum_{p \in G} T(p) \geqslant \sum_{p \in G} U(p) \geqslant \sum_{p \in G} 1 = G(x).$$

为了证明对于所有 $p \in G$，$U(p) \geqslant 1$，我们考虑所有可能的 k_1, k_2, k_3, k_4。经过对这个函数作 108 次计算，我们得 $U(p) \geqslant 1$。

在(6)中，$S(x)$可以表示为 10 个形如 $c_n \sum_{p_i \in L_n} P(x, p_i, x^{5/64})$ 及 7 个形如 $d_n \sum_{p_i \in L_n} P(x, p_t, p_i)$的项之和，这些可以由$\Lambda(\alpha)$的表与定理$D$与$E$来加以估计。取$\nu_1 = 3/8 - 1/10^7$。则得$G(x) \leqslant S(x) < 15.0607 B_0 x / \ln^2 x (x > x_0)$。命 $P(x)$表示适合 $p \leqslant x$，及 $p+2$ 不能被任何$\leqslant x^{1/16}$的素数整除的素数个的个数。命 $a = a_1 = \cdots = a_r = -2$。则当 $x > x_0$时。

$$P(x) = P_\omega(x, 1, x^{1/16}) > 8/3 B_0 \lambda(6) x / \ln^2 x$$
$$> 15.9979 B_0 x / \ln^2 x.$$

命 $K(x)$表示适合 $p \leqslant x$ 及 $p+2$ 无平方因子且无 $\leqslant x^{1/16}$的素因子的素数 p 的个数，则当 $x > x_0$ 时

$$K(x) < 0.0001 B_0 x / \ln^2 x.$$

命 $F(x)$为适合 $p \leqslant x$ 的素数个数，此处 p 满足 1) $p+2$ 没有$\leqslant x^{1/16}$ 的素因子；2) $p+2$ 没有平方因子及 3) $p+2$ 最多只有 3 个素因子，则当 $x > x_0$ 时

$$F(x) \leqslant P(x) - G(x) - K(x) - 2 > 0.937 B_0 x / \ln^2 x.$$

因当 $x \to \infty$时，$F(x) \to \infty$。故得定理 2。为了证明定理 1，在$G(x), M, P(x), K(x), F(x)$的定义中，$p+2$ 需换成

$2N-p$。并在 $P(x,p_i,x^{0.64})$ 与 $P(x,p_i,p_i)$ 的定义中，我们取 $a_i=2N(1\leqslant i\leqslant r)$。

参 考 文 献

〔1〕 A.Renyi, Izv.Akzd.Nauk SSSR, Ser.Mat; 12, 1948, 57—78.

〔2〕 Wang Yuan, Sci.Sinica, 11, 1962, 1033—1054.

〔3〕 B.V.Levin, Dokl.Akad.Nauk UzSSR, 11, 1962, 7—9; Mat.Sbornik, 61, 1963, 389—407.

〔4〕 M.B.Barban, Mat.Sbornik, 61, 1963, 418—425.

16.狄里希勒L-级数的密度猜想

阿·依·维诺格拉朵夫

§1. 本文的宗旨为证明下面的定理：

定理 1. 命 $N_d(\sigma,t)$ 为所有模 d 的狄里希勒 L—级数在区域 $R_e\rho\geqslant\sigma,|I_m\rho|\leqslant t$ 中的零点 ρ 的个数，则在区间 $D\leqslant d\leqslant 2D$ 中最多除去 $D^{1-0.5}$ 个整数外，皆有

$$N_d(\sigma,t)<(t\cdot\ln D)^{c_0\cdot\varepsilon^{-4}}\cdot D^{2(1+\varepsilon)(1-\sigma)},$$

$$\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1,\ t\geqslant 1,$$

此处 ε 为任意给定正数。

这个定理通常称为狄里希勒 L-级数的平均密度猜想。

由定理 1 及巴尔巴恩〔1〕的工作可得。

定理 2. 算术数列中的素数分布的平均渐近律

$$\sum_{d \leqslant x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \max_{(l,d)=1} \left| \pi(x,d,l) - \frac{1}{\varphi(d)} Li(x) \right|$$

$$\ll \frac{x}{(\ln x)^{c}}$$

成立，此处 c 为任意大常数而 ε 为任意小正数。

对于数论中很多问题，定理 2 可以用来代替广义黎曼猜想，特别由王元〔3〕的工作与列文〔4〕的工作可以推出

定理 3. 每个大偶数 m 可以表示为 $m=p+P_3$，此处 p 为一个素数及 P_3 为一个素因子个数不超过 3 的殆素数．进而言之，这个方程的介数多于 $c_0 S(m)\dfrac{m}{\log^2 m}$，此处 $c_0>0$ 为一个绝对正常数及 $S(m)$ 表示奇异级数。

对于差数问题

$$2k=p-P_3, k=1,2,\cdots,$$

我们有类似的结果。

关于两项问题的上界估计，我们有

定理 4. 命 m 为一个偶数．则方程 $m=p+q$ 的素数解 p,q 的个数不超过 $(4+\varepsilon)\,S(m)\dfrac{m}{\ln^2 m}$，此处 ε 为任意正数及 $S(m)$ 表示奇异级数。

在 L-级数的模及其零点的界之间有一些熟知的关系。$L(s,\chi)$ 在某区域中的零点个数为 $O(\ln Dt)$，因此由〔1〕的方法，类似于定理 2，我们可以证明除数函数幂 $\tau_k^n(m)$ 的中值公式：

$$\sum_{d<x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \max_{(l,d)=1} \left| \sum_{\substack{m\leq x \\ m\equiv l\,(d)}} \tau_k^n(m) - A_k^n(x,d) \right|$$

$$< \frac{x}{(\ln x)^c},$$

此处 k 与 n 为两个给定正整数及 $A_k^n(x,d)$ 表示 $\tau_k^n(m)$ 的和的期望主项。

这个中值公式可以用来建立一般的林尼克〔6〕公式，即

定理 5. 渐近关系

$$\sum_{m<x} \tau_k^n(m+l) \cdot \tau(m) \sim c_{k,n}(\ ) x \ln^{k^n} x$$

成立。

注意用梯其玛奇方法〔11〕，由定理 2 易得林尼克定理〔7〕的一个新证明，即证明梯少玛奇的除数问题：

$$\sum_{p<x} \tau(p-l) \sim E(l) \cdot x.$$

定理 1 的证明方法如下，首先，证明的主要困难在于建立下面的估计，即对于任何整数 $n\geqslant 2$ 及区间 $D^{1/n}\leqslant Z \leqslant D^{\frac{1}{n-1}}$ 中的任何 Z，不等式

$$\sum_{d=D}^{2D} \sum_{\chi_d \neq \chi_0} \left| \sum_{m<Z} \chi_d(m) \right|^{2n} \leqslant D^2 Z^n \exp[(\ln D)^\varepsilon] \quad (1)$$

成立。

这表明非主特征值的平均和不超过求和区间长度的平方根。

第二步为当 $n\geqslant 2$ 时来证明(1)式。本文建议的方法可以

很好地处理 $n\geqslant 4$ 时的高次矩，但不能处理 $n=2,3$ 的情况，$n=3$ 时，估计式(1)是林尼克建立的，这对我们是本质上有用的。

初看来，若我们分析本文§5 的方法，我们可以得到一些奇怪现象。

对于 $n=2$，(1)易从§5 的方法推出。

参 考 文 献

〔1〕 M.B.Barban, Mat.Sbornik, 61, 1963, 418—425.

〔2〕 A.I.Vinogradov, Dokl.Akad.Nauk SSSR, 158, 1964, 1014—1017.

〔3〕 Wang Yuan, Acta Math.Sinica, 10, 1960, 168—181.

〔4〕 B.V.Levin, Mat.Sbornik, 61, 1963, 389—407.

〔5〕 Ju.V.Linnik, Izv. Akad.Nauk SSSR, 24, 1960, 629-706.

〔6〕 Ju.V.Linnik, Abstract on intern.Math.Conf; Edinburgh, 1958.

〔7〕 Ju.V.Linnik, The dispersion method in binary additive problems, Leningrad Univ.Press, 1961; Providence, R.I; 1963.

〔8〕 Ju.V.Linnik, Mat.Sbornik, 53, 1961, 3—38.

〔9〕 C.Hooley, Acta Math; 97, 1957, 189—210.

〔10〕 I. M. Vinogradov, Selected Papers, Akad. Nauk SSSR Press, 1952.

〔11〕 E.C.Titchmarsh, Rend. Circ. Mat. Palermo, 54, 1930, 414—429.

编者注：定理 2 的更为漂亮的证明可见本书后面庞比尼与潘承洞的文章，所以我们略去本文的其余部分.

17.关于大筛法

庞比尼

1.本文的目的为给予林尼克的大筛法以新的与改进的形式并给出一些应用. 大筛法导源于哈代-李特伍德圆法，在它的最普遍的形式中，它可以考虑为与一个积分 $\int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha$ 引起的奇异级数相关联的一个不等式.

最近，罗斯〔1〕对这个问题作出了重要进展，他证明了下面的定理.

定理 A(罗斯〔1〕). 命 n_j $(1\leqslant j\leqslant Z)$ 为不超过 N 的互异整数、及命 $Z(N;q,a)$ 表示 $n_j\equiv a(\bmod q)$ 的 n_j 的个数. 命 $X\geqslant 2$ 及命 P 为满足 $p\leqslant X$ 的一个互异素数集，则

$$\sum_{p\in P} p \sum_{a=1}^{p}(Z(N;p,a)-Z/p)^2 \ll ZN+ZX^2\log R$$
$$+Z^2|P|R^{-2},$$

此处 $|p|$ 表示 p 的元素个数.

特别地，若 $X\geqslant N^{1/2}(\log N)^{-1/2}$，则

$$\sum_{p<X} p \sum_{a=1}^{p}(Z(N;p,a)-Z/p)^2 \ll ZX^2\log X.$$

我们将对这个结果作一些改进而证明

定理 1.在定理 A 的记号下，我们有

$$\sum_{p<X} p \sum_{a=1}^{p} (Z(N; p,a) - Z/p)^2 \leqslant 7\max(N, X^2)\, Z.$$

我们在此将要考虑的大筛法的普遍形式将包有定理 1 为其特例，它取下面定理的形式，现在关于素数与整数贯的任何文献中都未见到过：

定理 2．命 a_n 为任意复数及

$$S(\alpha) = \sum_{Y<n\leqslant Z} a_n e(n\alpha), \tag{1.1}$$

此处用通常的记号 $e(t) = e^{2\pi it}$．则得

$$\sum_{q\leqslant X} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} |S(a/q)|^2 \leqslant 7\max(Z-Y, X^2)$$

$$\sum_{Y<n\leqslant Z} |a_n|^2. \tag{1.2}$$

为了推出定理 1，在定理 2 中取 $Y=0$ 及 $Z=N$，并当 $n=n_j$ 时，命 $a_n=1$，否则 $a_n=0$．则$\Sigma|a_n|^2 = Z$(用定理 A 的记号)，及由 (1.2) 推出

$$\sum_{p\leqslant X}\sum_{a=1}^{p-1} |S(a/p)|^2 \leqslant 7\max(N, X^2) Z.$$

用简单的计算可得

$$\sum_{a=1}^{p-1} |S(a/p)|^2 = p\sum_{a=1}^{p} (Z(N; p,a) - Z/p)^2,$$

故得定理 1．

有兴趣者为定理 2，它并非远离臻于至善者，首先取 $Z-Y\geqslant X^2$ 及 $a_n=1$．则 $|S(1)|^2 = (Z-Y)^2$，及(1.2)给出上界 $7(Z-Y)^2$；这表明当 $Z-Y\geqslant X^2$ 时，我们不能将因子 $7\max(Z-Y, X^2)$ 换为 $\max(Z-Y, X^2)$．现在取 $Y=0, Z=1$．

$a_1=1$. 则$|S(a/q)|=1$. 因此(1.2)的左端为

$$\left(\sum_{q\leq X}\phi(q)\right)\left(\sum_{Y<n\leq Z}|a_n|^2\right)$$

$$\sim\frac{3X^2}{\pi^2}\sum_{Y<n\leq Z}|a_n|^2.$$

这表明当$Z-Y<X^2$，我们不能将因子7换为任何小于$3/\pi^2$的数.

我们可以将（1.2）看成加性特征的不等式,我们可以询问是否存在一个乘性特征的相应不等式？尽管最后结果取不同形状，事实上就是这个情况的结果.

命Q为正整数的有限集，并命

$$M=M(Q)=\max_{q\in Q}q, \tag{1.3}$$

$$D=D(Q)=\max_{q\in Q}d(q), \tag{1.4}$$

此处$d(q)$表示q的因子个数. 对于任意模q的特征χ,命$\tau(\chi)$表示高斯和

$$\tau(\chi)=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e(a/q). \tag{1.5}$$

我们有

$$|\tau(\chi)|=\begin{cases}\mu^2(q/q^*)q^*, 当(q^*,q/g^*)=1,\\ 0, 其他情况\end{cases} \tag{1.6}$$

此处q^*为特征χ的引导(χ为模q^*的原特征对模q的扩张)注意当χ为原特征(mod$q$)时有$|\tau(q)|^2=q$,及$|\tau(\chi_0)|^2=\mu^2(q)$,此处$\chi_0$为主特征，及恒有$|\tau(\chi)|^2\leqslant q$.

定理2的乘法类似为：

定理3. 命a_n为任意复数，及Q为任意有限正整数集

合。则

$$\sum_{q<Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}|\tau(\chi)|^2\left|\sum_{y<n\leqslant z}\chi(n)a_n\right|^2$$

$$\leqslant 7\mathrm{D}\max(Z-Y,M^2)\sum_{Y<n\leqslant Z}d(n)|a_n|^2, \qquad (1.7)$$

此处$\sum_{\chi}$表示过模 q 的所有特征 χ 求和，

对于特殊情况，可以证明稍强的结果，特别地，若 n 为素数时，$a_n=1$，否则 $a_n=0$，则有同样广义类型的结果，但没有 D 与 $d(n)$。

定理 3 对狄里希勒 L—函数的零点与素数分布理论有重要应用；事实上，林尼克在创立大筛法时即着眼于对素数论中经典问题的应用。

我们将要证明素数分布方面的主要结果如下。命

$$\psi(z;q,a)=\sum_{\substack{n\leqslant z\\ n\equiv a\,(\bmod q)}}\Lambda(n),$$

此处$(a,q)=1$，考虑算术数列中的素数定理的误差：

$$E(z;q,a)=\psi(z;q,a)-z/\phi(q), \qquad (1.8)$$

定义 $E(z,q)$及 $E^*(z,q)$如下：

$$E(z,q)=\max_{(a,q)=1}|E(z;q,a)|, \qquad (1.9)$$

$$E^*(z,q)=)\max_{y\leqslant z}E(y,q). \qquad (1.10)$$

定理 4．对于任何正常数 A 皆存在正常数 B 使当 $X\leqslant z^{1/2}(\log z)^{-B}$时有

$$\sum_{q<X}E^*(z,q)\leqslant z(\log z)^{-A}. \qquad (1.11)$$

我们将证明 B 可以取作 $3A+23$。

看来这条定理也可以从前面提到的罗斯的定理 A 来证明，然而，应用定理 3 来证明看来是更相宜的。

我们需注意既使假定了广义黎曼猜想，我们将它用于此；$E^*(z,q) \ll z^{1/2}(\log z)^2$．$(q\leqslant z)$，我们亦不能证明比（1.11）更精密的结果，我们可以说在不少与素数有关的堆垒问题中，定理 4 可以用来代替广义黎曼猜想，关于这个一般原则有不少例子，德文坡特(Davenport)教授与作者曾将这定理有关相邻素数距离问题上应用的详细证明投交 Proc. Royal Soc. A.

类似于(1.11)的结果，例如对于某个正常数 η 有

$$\sum_{q\leqslant z^{\eta-\varepsilon}} \mu^2(q)E(z,q) \ll z(\log z)^{-A}. \qquad (1.12)$$

已被几个作者宣布过，林尼克与端尼〔2,3〕关于大筛法的工作导至一个略比（1.12）弱一点的不等式。最近，巴尔巴恩 1),2)与潘承洞 3)，4)发表了这方面的结果。无论如何，巴尔巴恩的工作受到了潘承洞 3)的批评，但作者还不理解潘承洞 4）的文章(似乎该文引理 1.2 中素数的除外集依赖于 s 与 a，而(2.7)中 a 与 $s(=\rho)$的选择依赖于 D,对 ρ 的选择有许多可能,所以引理 1.2 不可使用)。

定理 4 将从 L-函数零点的新型的密度定理（下面的定理 5)中推出；绝大部分属于所谓 L-函数统计理论的已知结果，均包于这个密度定理之中，

命 $N(\alpha,T,\chi)$表示 $L(s,\chi)$在矩形

$$\alpha\leqslant\sigma\leqslant 1, \quad |t|\leqslant T \qquad (1.13)$$

中的零点个数，此处$\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$。我们的主要密度定理为：

定理 5. 命 Q 为一个正整数的有限集及命 M 与 D 由(1.3)与(1.4)定义。则对于 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1, T\geqslant 2$,

$$\sum_{q\leq Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}|\tau(\chi)|^2 N(\alpha,T;\chi)\leqslant DT(M^2$$

$$+MT)^{4(1-\ )\ (3-2\ )}\log^{10}(M+T)\quad(1.14)$$

对于 Q 一致地成立。

除引用兰岛，李特伍德与梯其玛奇的经典著作外，定理 4 与 5 的证明是自给自足的，我们已给足证明的详细细节。

关于(1.14)的意义加一些注记可能是有意义的，李特伍德曾指出，对于固定 χ 与变数 s，狄里希勒 L—函数 $L(s,\chi)$ 理论中的许多结果成立，则对于固定 s 与变数 χ（对于变数模）具有类似性（"q 类似"），关于这方面的一个好例子为

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}|L(1+it,\chi)|/\log\log t>0,$$

其中，q 类似为对于二次特征 $\chi(\text{mod} q)$ 有

---

1) M. B. Barban, Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk Uz. S. S. R, 22(1961), 1-20.

2) M. B. Barban, Mat. Sbornik (N. S.) 61 (103) (1963), 418-425.

3) Pan Cheng-Dong, Acta Math. Sinica, 14 (1964), 597-606 = Chinese Math, 5(1964), 642-652.

4) Pan Cheng-Dong, Acta Math. Sinica, 13 (1963), 262-268 = Chinese Math, 4(1963), 283-290.

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} L(1,\chi)/\log\log q>0.$$

易见我们的不等式(1.14)与 L—函数的密度猜想的 q 类似相关联，这个猜想断言

$$\sum_{\chi} N(\alpha,T;\chi) \ll q^{1+\varepsilon} T^{2(1-\alpha)+\varepsilon}, \qquad (1.15)$$

而其 q 类似为

$$\sum_{\chi} N(\alpha,T;\chi) \ll q^{2(1-\alpha)+\varepsilon} T^{1+\varepsilon}. \qquad (1.16)$$

此处 $\sum\limits_{\chi}$ 表示过所有特征 $\chi(\bmod q)$的一个和. 最后两个不等式尚未被证明，也可能很困难，但可能证明很接近于(1.16)的结果，事实上，正如我们将于以后看到的，我们可以由定理 5 推出

系：对于 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$ 及 $2\leqslant T\leqslant\sqrt{x}$ 一致地有

$$\sum_{q<X}\sum_{\chi} N(\alpha,T;\chi) \ll X^{1\ 2(1-\alpha)+\varepsilon} T^{1+\varepsilon}. \qquad (1.17)$$

进而言之，

$$\sum_{q<X}\sum_{\chi} N(\alpha,T;\chi) \ll X^{1+\varepsilon} T^{2+\varepsilon}. \qquad (1.18)$$

对于 $5/6\leqslant\alpha\leqslant 1, 2\leqslant T\leqslant X^2$ 一致地成立.

(1.17) 表示密度猜想 (1.16) 对于 q 平均地成立.如果 $2\leqslant T\leqslant (\max q)^{1/2}$，而 (1.18) 表示当 $5/6\leqslant\alpha\leqslant 1$ 及 $T\leqslant (\max q)^2$，它关于 q 的平均亦成立，后面的结果是惊奇的，这说明定理 5 确为一个新型的密度结果，我们作如下猜想

密度猜想，若$\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$ 及 $T\geqslant 2$，则

$$\sum_{q\leqslant X}\sum_{\chi}{}^{*}N(\alpha,T;\chi)\ll X^{4(1-\alpha)+\varepsilon}T^{1+\varepsilon} \qquad (1.19)$$

对于 α 一致成立，此处 $\sum\limits_{\chi}{}^{*}$表示过 $\bmod q$ 所有原特征的一个和。

最后，作者对德文坡特教授表示深深的感谢，由于一次讨论才导致了这项工作，他还帮助审核了本文。

2.我们将在本节证明定理 2 与 3.我们记(m,n)平面上形如

$$y<m\leqslant z,\quad y'<n\leqslant z'$$

的矩形为 $R(y,z;y',z')$.或简记为 R. 命 $c_{m,n}$ 为复数的双指标叙列，其中 (m,n) 的定义范围为方形 $Y<m\leqslant Z, Y<u\leqslant Z$; 对于每个这种数列，我们可以使之对应于方形的子矩形

$$R_0=R_0(Y,Z_0;Y,Z_0'),$$

它依赖于数列 $c_{m,n}$及 Y,Z,且具有性质：

对于每个含于 $R(Y,Z;Y,Z)$的矩形 $R=R(Y,z;Y,z')$，我们有

$$\left|\sum_{R}c_{m,n}\right|\leqslant\left|\sum_{R_0}c_{m,n}\right|. \qquad (2.1)$$

显然，这样一个矩形 R_0 总是存在的，显然并不需要它是唯一的.

引 1(阿贝尔 (Abel)不等式). 命 $b_{m,n}$ 为实数,此处 $Y<m\leqslant Z$, $Y<n\leqslant Z$，并适合条件

$$
\text{(i)}\begin{cases} b_{m,n}\geqslant 0,\ b_{m,n}-b_{m+1,n}\geqslant 0,\ b_{m,n}-b_{m,n+1}\geqslant 0, \\ b_{m,n}-b_{m+1,n}-b_{m,n+1}+b_{m+1,n+1}\geqslant 0. \end{cases}
$$

命 $B=\max b_{m,n}$. 则

$$
\left|\sum_{R_0} c_{m,n} b_{m,n}\right| \leqslant B \left|\sum_{R_0} c_{m,n}\right|. \qquad (2.2)
$$

证. 当$(m,n)\in R_0$时，置 $b^*_{m,n}=b_{m,n}$，否则置$b^*_{m,n}=0$. 由分部求和得

$$
\sum_{R_0} c_{m,n} b_{m,n}=\sum_{R_0}\left(\sum_{R(-,m,\Upsilon,n)} c_{h,k}\right)
$$

$$
(b^*_{m,n}-b^*_{m-1,n}-b^*_{m,n-1}+b^*_{m-1,n-1}).
$$

因此

$$
\left|\sum_{R_0} c_{m,n} b_{m,n}\right| \leqslant \left(\max_R \left|\sum_R c_{m,n}\right|\right)
$$

$$
\left(\sum_{R_0} \left|b^*_{m,n}-b^*_{m-1,n}-b^*_{m,n-1}+b^*_{m+1,n+1}\right|\right).
$$

由(2.1)，我们有

$$
\max_R \left|\sum_R c_{m,n}\right| \leqslant \left|\sum_{R_0} c_{m,n}\right|,
$$

又由条件 (i) 得

$$
\sum_{R_0} \left|b^*_{m,n}-b^*_{m+1,n}-b^*_{m,n-1}+b^*_{m+1,n+1}\right|
$$

$$
=\sum_{R_0} (b^*_{m,n}-b^*_{m+1,n+1}-b^*_{m,n+1}+b^*_{m+1,n+1})
$$

$$
=b_{+1,\ +1}\leqslant B.
$$

故得 (2.2) .

引 2. 命 $c_{m,n}$ 与 R_0 如前定义，及假定 $\eta>0$. 则

$$\left|\sum_{R_0} c_{m,n} - (2\eta)^{-1}\sum_{R_0} c_{m,n}\int_{-\eta}^{\eta} e((m-n)\beta)\,d\beta\right|$$

$$\leqslant\left(\frac{\sinh x}{x}-1\right)\left|\sum_{R_0} c_{m,n}\right|, \tag{2.3}$$

此处 $x=4\pi\eta(Z-Y)$。

证：我们有

$$(2\eta)^{-1}\sum_{R_0} c_{m,n}\int_{-\eta}^{\eta} e\left((m-n)\beta\right)d\beta$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(2\pi\eta)^{2k}}{(2k+1)!}\sum_{R_0} c_{m,n}(m-n)^{2k}$$

$$=\sum_{R_0} c_{m,n}+T,$$

此处

$$T=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}(2\pi\eta)^{2k}}{(2k+1)!}\sum_{r=1}^{2k}(-1)^{r}\binom{2k}{r}$$

$$\sum_{R_0} c_{m,n}(Z-m)^{r}(Z-n)^{2k-r}.$$

数列 $b_{m,n}=(Z-m)^{r}(Z-n)^{2k-r}$ 适合引1的条件(i)及 $B\leqslant(Z-Y)^{2k}$。因此由(2—2)。得

$$\left|\sum_{R_0} c_{m,n}(Z-m)^{r}(Z-n)^{2k-r}\right|$$

$$\leqslant(Z-Y)^{2k}\left|\sum_{R_0} c_{m,n}\right|.$$

所以

$$|T|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2\pi\eta)^{2k}}{(2k+1)!}\sum_{r=0}^{2k}\binom{2k}{r}(Z-Y)^{2k}\left|\sum_{R_0} c_{n,n}\right|$$

$$= \left(\frac{\sinh x}{x}+1\right)\left|\sum_{R0} c_{m,n}\right|,$$

此处 $x = 4\pi\eta(Z-Y)$。引 2 证完.

定理 2 的证明. 命

$$S_{m,q} = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e(am/q) \tag{2.4}$$

为熟知的拉曼努扬和. 取

$$c_{m,n} = a_m \bar{a}_n \sum_{q \leq X} S_{m-n,q}, \tag{2.5}$$

此处$(m,n) \in R(Y,Z;Y,Z)$. 选取 η 满足

$$x = 4\pi\eta(Z-Y) = \min(1.3168, 2\pi(Z-Y)X^{-2}), \tag{2.6}$$

则 $\sinh x < 2x$, 及由 (2.3) 推出

$$\left|\sum_{R0} c_{m,n}\right| \leqslant \frac{2\pi(Z-Y)}{2x-\sinh x}\left|\sum_{R0} c_{m,n}\right.$$

$$\left.\int_{-\eta}^{\eta} e\left((m-n)\beta\right)d\beta\right|.$$

由于对于 $0 < x \leqslant 1.3168$ 时有

$$2x - \sinh x > \frac{x}{1.4632}.$$

所以

$$\left|\sum_{R0} c_{m,n}\right| \leqslant \max(7(Z-Y), 1.47X^2)$$

$$\left|\sum_{R0} c_{m,n}\int_{-\eta}^{\eta} e(m-n)\beta)d\beta\right|.$$

命 $M_{a,q}$ 表示区间$|\alpha - a/q| < \eta$, 并置

$$S(\alpha;Y,Z) = \sum_{Y<n\leqslant Z} a_n e(n\alpha),$$

这与(1.1)中的 $S(\alpha)$是一样的，所以

$$\sum_{R0} c_{m,n} \int_{-\eta}^{\eta} e((m-n)\beta)d\beta$$

$$= \sum_{Y<m\leqslant Z_0} \sum_{Y<n\leqslant Z_0} a_m \bar{a}_n \sum_{q\leqslant X} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \int_{M_{a,q}} e((m-n)\alpha)d\alpha$$

$$= \sum_{q\leqslant X} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \int_{M_{a,q}} S(\alpha; Y, Z_0) \overline{S(\alpha; Y, Z_0')} d\alpha.$$

它有绝对值

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{q\leqslant X} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \int_{M_{a,q}} \{|S(\alpha;Y,Z_0)|^2$$

$$+ |S(\alpha;Y,Z_0')|^2\}d\alpha$$

$$\leqslant \max_z \sum_{q\leqslant X} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \int_{M_{a,q}} |S(\alpha;Y,z)|^2 d\alpha$$

$$\leqslant \max_z \int_0^1 |S(\alpha;Y,z)|^2 d\alpha$$

$$= \max_z \sum_{Y<n\leqslant z} |a_u|^2 = \sum_{Y<t\leqslant Z} |a_n|^2.$$

在此我们有这样的事实，即诸区间$M_{a,q}$互不重复，这是由于 $q\leqslant X$, $(a,q)=1$ 及$M_{a,q}$ 的长度 2η 满足 $2\eta\leqslant X^{-2}$，其中 x 满足(2.6)。

我们现在证明了

$$\left|\sum_{R0} c_{m,n}\right| \leqslant \max(7(Z-Y), 1.47X^2) \sum_{Y<n\leqslant Z} |a_n|^2.$$

由于 (2.1) 有

$$\left|\sum_{R} c_{m,n}\right| \leqslant \left|\sum_{R0} c_{m,n}\right|,$$

及

$$\sum_{R(\cdot,Z,Y,Z,)} c_{m,n} = \sum_{q\leqslant X} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \sum_{Y<m\leqslant ZY} \sum_{<n\leqslant Z}$$

$$a_m \bar{a}_n e(a(m-n)/q) = \sum_{q\leqslant X} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} |S(a/q;Y,Z)|^2,$$

故得(1.2)。

定理3的证明是类似的，但需要下面与拉曼努扬和有关的积性特征相关的引理。

引3. 我们有

$$\sum_{\chi} |\tau(\chi)|^2 \chi(m) \bar{\chi}(n) = \begin{cases}\phi(q) S_{m-n,q}, \text{当}(mn,q)=1, \\ 0, \text{当}(mn,q)>1,\end{cases} \quad (2.7)$$

此处 $\sum_{\chi}$ 表示过所有模 q 的特征 χ 求和。

证：若 $(mn,q)>1$，因对于每个 χ 皆有 $\chi(m)\bar{\chi}(n)=0$,所以引理成立，现在假定 $(mn,q)=1$. 记 Σ' 为过 $\bmod q$ 的缩系的和，则因为 $am\equiv bn(\bmod q)$ 的所有介均由 $a\equiv hn$，$b\equiv h_m$ 给出，所以

$$\sum_{\chi} |\tau(\chi)|^2 \chi(m) \bar{\chi}(n) = \sum_{a}{}' \sum_{b}{}' \sum_{\chi} \chi(am)$$

$$\bar{\chi}(bn) e((a-b)/q)$$

$$= \phi(q) \sum_{a}{}' \sum_{am\equiv bn \,(\bmod q)}{}' e((a-b)/q)$$

$$=\phi(q)\sum_{h}{}' e(h(n-m)/q)$$

$$=\phi(q)S_{n-m,q}=\phi(q)S_{m-n,q}.$$

故得引 3。

定理 3 的证明：取

$$c_{m,n}=a_m\bar{a}_n\sum_{q\in Q}{}^{*}S_{m-n,q}, \tag{2.8}$$

此处Σ^*表示一个和，其中 q 仅过适合于 $(q,mn)=1$ 的整数。命

$$S_q(\alpha;Y,Z)=\sum_{\substack{Y<n\leqslant Z\\(n,q)=1}}a_ne(n\alpha), \tag{2.9}$$

$$S_{(d)}(\alpha;Y,Z)=\sum_{\substack{Y<n\leqslant Z\\d\mid n}}a_ne(n\alpha). \tag{2.10}$$

选取 η 满足

$$x=4\pi\eta(Z-Y)=\min(1.3168,2\pi(Z-Y)M^{-2}),$$

则如前可得

$$\left|\sum_{R0}c_{m,n}\right|\leqslant 7\max(Z-Y,M^2)\left|\sum_{R0}c_{m,n}\int_{-\eta}^{\eta}e((m-n)\beta)d\beta\right|=7\max(Z-Y,M^2)$$

$$\left|\sum_{q\in Q}\sum_{a}\int_{M_{a,q}}S_q(\alpha;Y,Z_0)\overline{S_q(\alpha;Y,Z_0')}\,d\alpha\right|\leqslant 7\max(Z-Y,M^2)$$

$$\max_{z}\left(\sum_{q\in Q}\sum_{a}{}'\int_{M_{a,q}}|S_q(\alpha;Y,z)|^2d\alpha\right).$$

由一个熟知的恒等式及利用柯西不等式可知

$$|S_q(\alpha;Y,Z)|^2=\left|\sum_{d\mid q}\mu(d)S^{(d)}(\alpha;Y,Z)\right|^2$$

$$\leqslant d(q)\sum_{d\mid q}|S^{(d)}(\alpha;Y,Z)|^2$$

$$\leqslant D\sum_{d=1}^{\infty}|S^{(d)}(\alpha;Y,Z)|^2. \quad (2.11)$$

因此

$$\max_z\left(\sum_{q\le Q}\sum_a{}'\int_{M_{a,q}}|S_q(\alpha;Y,z)|^2d\alpha\right)$$

$$\leqslant D\sum_{d=1}^{\infty}\max_z\int_0^1|S^{(d)}(\alpha;Y,z)|^2d\alpha$$

$$=D\sum_{d=1}^{\infty}\max_z\sum_{\substack{Y<n\le Z\\ d\mid n}}|a_n|^2$$

$$=D\sum_{Y<n\le Z}d(n)|a_n|^2.$$

因由引 3 得

$$\sum_{R(Y,Z,Y,Z)}c_{m,n}=\sum_{q\in Q}\sum_{\substack{Y<m\le Z\\(m,q)=1}}\sum_{\substack{Y<n\le Z\\(n,q)=1}}$$

$$a_m\bar{a}_nS_{m-n,q}=\sum_{q\in Q}\sum_{Y<m\leqslant Z}\sum_{Y<n\leqslant Z}a_m\bar{a}_n\frac{1}{\phi(q)}$$

$$\sum_{\chi}|\tau(\chi)|^2\chi(m)\overline{\chi}(n)=\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}$$

$$|\tau(\chi)|^2\left|\sum_{Y<n\le Z}\chi(n)a_n\right|^2.$$

由此易得定理 3。

3. 本节我们将证明定理 4. 我们用下面的记号，对于任何特征 $\chi(\max q)$，我们用 χ^* 表示与 χ 关联的唯一的原特征，而用 q^* 表示 χ^* 的模，即 χ 的导引；我们用 $\sum\limits_{\chi}^*$ 表示过 mcd$q$ 所有原特征的一个和；mod$q$ 的主特征记为 χ_0. 对于任意特征 χ，定义

$$\psi(z,\chi)=\sum_{n\leqslant z}\chi(n)\Lambda(n). \tag{3.1}$$

引 4. 命 N 为任意固定大数及 $X_0=(\log z)^N$. 假定 $X\leqslant z^{1\ 2}$. 对于任意 $D\geqslant 2$ 及正整数 M，命 Q_M 为满足下面条件

$$1<q\leqslant M,\quad d(q)\leqslant D \tag{3.2}$$

的整数 q 的集合，则对于每个任意的固定大数 A，我们有

$$\sum_{q<X}E^*(z,q)\ll z(\log z)^{-A}+zD-(\log z)^3$$

$$+(\log z)^3\max_{X_0<M\leqslant X}M^{-1}\sum_{QM}\sum_{\chi}{}^*\max_{y\leqslant z}$$

$$|\psi(y,\chi)|, \tag{3.3}$$

证：我们有

$$\sum_{q<X}E^*(z,q)=\sum_{q\in QX}+\sum_{q\bar{\in}QX}=\Sigma_1+\Sigma_2, \tag{3.4}$$

易于估计 Σ_2. 显然

$$\psi(z;q,a)\ll(\log z)\sum_{\substack{n\leqslant z\\ n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ q)}}1\ll(\log z)(1+z/\phi(q)).$$

由(1.10)中 $E^*(z,q)$ 的定义可知

$$E^*(z,q)\ll z(\log z)/\phi(q)\quad(q\leqslant z)$$

因此

$$\Sigma_2 \ll E^*(z,1) + \sum_{\substack{q \leqslant X \\ d(q) > D}} z(\log z)\phi(q)$$

$$\ll z(\log z)^{-A} + z(\log z) D^{-1} \sum_{q \leqslant X} d(q)/\phi(q)$$

$$\ll z(\log z)^{-A} + zD^{-1}(\log z)^3 .$$

对于Σ_1、我们用$\psi(z,\chi)$来表示$E^*(z,q)$，所以

$$\psi(z;q,a) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(a)\psi(z,\chi),$$

由此可得

$$\phi(q)E(z,q) \leqslant |\psi(z,\chi_0) - z| + \sum_{\chi \neq \chi_0} |\psi(z,\chi)| .$$

现在由经典形式的素数定理得

$$|\psi(z,\chi_0) - z| \ll z\exp(-C(\log z)^{1/2}) \ll z(\log z)^{-A-1},$$

而当$\chi \neq \chi_0$时

$$\psi(z,\chi) = \sum_{\substack{m \leqslant z \\ (m,q)=1}} \chi^*(m)\Lambda(m)$$

$$= \psi(z,\chi^*) - \sum_{\substack{m \leqslant z \\ (m,q)>1}} \chi^*(m)\Lambda(m)$$

$$= \psi(z,\chi^*) + O\Big(\sum_{\substack{p^\nu \leqslant z \\ p \mid q}} \log p \Big)$$

$$= \psi(z,\chi^*) + O((\log z)(\log q)).$$

因此

$$\phi(q)E^*(z,q) \ll z(\log z)^{-A-1} + \phi(q)(\log z)^2$$

$$+ \sum_{\chi \neq \chi_0} \max_{y \leqslant z} |\psi(y,\chi^*)| .$$

从而

$$\Sigma_1 \ll z(\log z)^{-A-1}\sum_{q\leq X}1/\phi(q)+X(\log z)^2$$

$$+\sum_{q\in Q_X}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\max_{y\leq z}|\psi(y,\chi^*)|$$

$$\ll z(\log z)^{-A}+\sum_{q\in Q_X}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\max_{y\leq z}|\psi(y,\chi^*)|.$$

因 $q^*|q$，所以 $d(q^*)\leqslant d(q)\leqslant D$，由于当 $\chi\neq\chi_0$时，$q^*>1$，所以 $q^*\in Q_X$，因此将属于同一模 q^* 的原特征放在一起则得

$$\sum_{q\in Q_X}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\max_{y\leq z}|\psi(y,\chi^*)|=$$

$$\sum_{q\in Q_X}\sum_{\chi}{}^*\max_{y\leq z}|\psi(y,\chi)|\quad\sum_{\substack{q\in Q_X\\ q\equiv 0(\bmod q^*)}}1/\phi(q)$$

由于 $\phi(a^*r)\geqslant\varphi(q^*)\phi(r)\gg q^*\phi(r)(\log X)^{-1}$，及$X<g$，则最后一个表达式

$$\ll(\log z)^2\sum_{q^*\in Q_X}(q^*)^{-1}\sum_{\chi}{}^*\max_{y\leq z}|\psi(y,\chi)|.$$

由西革尔瓦尔菲茨定理（见帕拉哈[4; Ch、1V、Satz 7.2 & Satr 8.2]）可知对于 $\chi\neq\chi_0$，

$$|\psi(z,\chi)|\ll z\exp(-c(\log z)^{\frac{1}{2}})$$

对于适合 $q\leqslant(\log z)^N=X_0$的 q 一致成立，此处 $c=c(N)$。易于证明对于 $\max\limits_{y\leq z}|\psi(y,\chi)|$有同样的估计，其中仅可能是另一常数 c，因此

$$\sum_{q^*\in Q_{X_0}}(q^*)^{-1}\sum_{\chi}{}^*\max_{y\leq z}|\psi(y,\chi)|\ll z(\log z)^{-A-2}.$$

利余的和，即过 $X_0<q\leqslant X$ 的和，可以分成形如 $2^{m-1}<q\leqslant 2^m$ 的 $\ll\log X$ 个区间之和，从而

$$\sum_{\substack{q^*\leqslant Q_X\\ q^*>X_0}}(q^*)^{-1}\sum_{\chi}{}^*\max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi)|\ll(\log z)\max_{X_0<\lambda\leqslant X}M^{-1}$$

$$\sum_{Q\lambda}\sum_{\chi}{}^*\max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi)|.$$

所以

$$\Sigma_1\ll z(\log z)^{-A}+(\log z)^3\max_{X_0<\lambda\leqslant X}M^{-1}\sum_{Q\lambda}\sum_{\chi}\max_{y\leqslant z}$$

$$|\psi(y,\chi)|,$$

代入(3.4)即得(3.3)，引4证完.

定理4的证明，由素数论中一个熟知的显公式（例如见帕拉哈〔4; Ch、VII,Satz 4.6〕)可知，对于 $\chi\neq\chi_0$，

$$|\psi(z,\chi)|\ll\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{z^\beta}{|\rho|}+\frac{z(\log z)^2}{T}+z^{\frac{1}{2}}$$

对于 $q\leqslant z$，$2\leqslant T\leqslant z$ 一致成立，其中 $\rho=\beta+i\gamma$ 过 $L(s,\chi)$ 满足 $0<\beta<1$ 的所有零点，重零点将计算其重数，由于 $|\psi(y,\chi)|\ll z^{\frac{1}{2}}$，此处 $y\leqslant z^{\frac{1}{2}}$，所以，

$$\max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi)|\leqslant\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{z^\beta}{|\rho|}+\frac{z(\log z)^2}{T}+z^{\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

对于 $q\leqslant z^{\frac{1}{2}}$，$2\leqslant T\leqslant z^{\frac{1}{2}}$ 一致成立.

首先考虑适合 $|\rho|<\frac{1}{4}$ 的零点的部分，这种零点个数

$\ll \log z$(见帕拉哈〔4；Ch、Vll、Satz3.3〕)，考虑到 $L(s,\bar{\chi})$ 的对应零点 $1-\rho$ 可知对于任何正数 ε 及 q 充分大时有

$$|q| > z^{-\varepsilon}.$$

（见帕拉哈〔4; Ch、Vll、Satz 6.9 & Satz 8.1〕），因此与这种零点有关的和的一部分

$$\ll \sum_{\rho} z^{\beta+\varepsilon} \ll (\log z)^{\frac{1}{4}-\varepsilon} \ll z^{\frac{1}{2}}.$$

关于满足 $|\rho| \geqslant \frac{1}{4}$ 的零点，仅需考虑满足 $\beta \geqslant \frac{1}{2}$ 者.

我们将区域 $|\gamma| \leqslant T$ 分成 $|\gamma| < 1$ 与 $2^{m-1} \leqslant |\gamma| < 2^m$，此处 $m = 1,2,\cdots$，则

$$\sum_{\substack{|\gamma| \leqslant T \\ |\rho| \geqslant \frac{1}{4}}} \frac{z^{\beta}}{|\rho|} \ll \sum_{2^{m-1} \leqslant T} 2^{-m} \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant 2^m \\ \beta \geqslant \frac{1}{2}}} z^{\beta}.$$

进而言之

$$\sum_{\substack{|\gamma| \leqslant 2^m \\ \beta \geqslant \frac{1}{2}}} z^{\beta} = \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant 2^m \\ \beta \geqslant \frac{1}{2}}} \left(z^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\beta} z^{\sigma} \log z d\sigma \right)$$

$$= z^{\frac{1}{2}} N\left(\frac{1}{2}, 2^m; \chi \right) + (\log z) \int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\alpha, 2^m; \chi)$$

$z^{\alpha} d\alpha$.

在(3.5)中应用这些结果得

$$\max_{y \leqslant z} |\psi(y,\chi)| \ll z^{1/2} + z(\log z)^2 T^{-1} + (\log z)$$

$$\sum_{2^{m-1} \leqslant T} 2^{-m} \left(z^{1/2} N(\frac{1}{2}, 2^m; \chi) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} N(\alpha, 2^m; \chi) \right.$$

$z^{\alpha} d\alpha)$.

所以

$$M^{-1}\sum_{Q_M}\sum_{\chi}{}^{*}\max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi)|$$

$$\ll M(z^{\frac{1}{2}}+z(\log z)^2T^{-1})+M^{-1}(\log z)$$

$$\sum_{2m-1\leqslant T} 2^{-m}\left\{z^{\frac{1}{2}}\sum_{QM}\sum_{\chi}{}^{*}N\left(\frac{1}{2},2^m;\chi\right)\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sum_{QM}\sum_{\chi}{}^{*}N(\alpha,2^m;\chi)z^{\alpha}d\alpha\right\}$$

$$\ll M(z^{\frac{1}{2}}+z(\log z)^2T^{-1})+M^{-1}(\log z)$$

$$\sum_{2^{m-1}\leqslant T} 2^{-m}\max_{\alpha}\left\{\sum_{QM}\sum_{\chi}{}^{*}N(\alpha,2^m;\chi)z^{\alpha}\right\}$$

$$\ll M(z^{\frac{1}{2}}+z(\log z)^2T^{-1})$$

$$+M^{-1}(\log z)^2\max_{2\leqslant T'\leqslant T}(T')^{-1}\max_{\alpha}$$

$$\left\{\sum_{QM}\sum_{\chi}{}^{*}N(\alpha,T';\chi)z^{\alpha}\right\}. \tag{3.6}$$

应用定理5，并注意对于一个原特征 $\chi(\bmod q)$，我们有$|\tau(\chi)|^2=q>\phi(q)$，所以

$$\sum_{Q_M}\sum_{\chi}{}^{*}N(\alpha,T';\chi)\leqslant\sum_{Q_M}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}$$

$$|\tau(\chi)|^2N(\alpha,T';\chi)$$

$$\ll DT'(M^2+MT')^{4(1-\quad)(\quad-\alpha)}(\log z)^{10}.$$

因此

$$2\ \max_{T'<t}(T')^{-1}\max_{\alpha}\left\{\sum_{Q_M}\sum_{\chi}{}^{*}N(\alpha,T';\chi)z^{\alpha}\right\}$$

$$\ll D(\log z)^{10}\max_{\alpha}(M^2+MT)^{5(1-\alpha)\ (3-2\alpha)}z^{\alpha}.$$

我们加于 M 与 T 的条件为 $M\leqslant X\leqslant z^{\frac{1}{2}}$ 与 $T\leqslant z^{\frac{1}{2}}$ 度量 D 在我们布置中，并且它关于 M 是独立的。

取 $D=(\log z)^{A\ 3}, T=M(\log z)^{A\ 6}, X\leqslant z^{\frac{1}{2}}(\log z)^{-A-5}$；由于 $M\leqslant X$，所以条件 $T\leqslant z^{\frac{1}{2}}$ 满足，将最后的不等式代入(3.6)则到

$$M^{-1}\sum_{Q_M}\sum_{\chi}{}^{*}\max_{y\leq z}|\psi(y,\chi)|$$

$$\ll Mz^{\frac{1}{2}}+z(\log z)^{-A-3}+M^{-1}(\log z)^{2\ \ 20}\max_{\alpha}$$

$$M^{8(1-\ )\ (3-2\ )}z^{\alpha}. \tag{3.7}$$

现在

$$\frac{8(1-\alpha)}{3-2\alpha}-1=2(1-\alpha)-\frac{(2\alpha-1)^2}{3-2\alpha}$$

$$\leqslant 2(1-\alpha)-\frac{1}{2}(2\alpha-1)^2=\frac{3}{2}-2\alpha^2.$$

当 $\alpha<\alpha_0$ 时，函数 $z^{\alpha}M^{\frac{3}{2}-2\alpha^2}$ 递增，而当 $\alpha>\alpha_0$ 时递减，此处 $\alpha_0=(\log z)/(4\log M)$。若 $M<z^{\frac{1}{4}}$，则 $\alpha_0>1$；当 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时，函数是 α 的递增函数，其最大值为

$$zM^{-\frac{1}{2}}\leqslant zX_0{}^{-\frac{1}{2}}=z(\log z)^{-\frac{1}{2}N}.$$

若 $z^{\frac{1}{2}}\leqslant M\leqslant X(<z^{\frac{1}{2}})$，则函数的最大值为

$$\exp\left(\frac{3}{2}\log M+\frac{1}{8}(\log z)^{2}/(\log M)\right).$$

将它考虑为 $\log M$ 的一个函数，括弧中的表达式为凸的，对于

$$\frac{1}{4}\log z\leqslant\log M\leqslant\log X$$

中的极大值为

$$\max\left(\frac{7}{8}\log z,\ \frac{1}{8}\ \frac{(\log z)^{2}}{\log X}+\frac{3}{2}\log X\right).$$

我们按定理4的假定取 $X=z^{\frac{1}{2}}(\log z)^{-B}$，则最后的表达式 $\leqslant \log z-B\log\log z+0(1)$，所以

$$z^{\alpha}M^{\frac{3}{2}-2\tau^{2}}\ll z(\log z)^{-\frac{1}{2}N}+z(\log z)^{-B}.$$

我们取 $N=2B$，并假定 $B\geqslant A+5$，所以较早的条件 $X\leqslant z^{\frac{1}{2}}(\log z)^{-A-5}$ 满足。

应用(3.7)中证明的结果可知当 $X_0\leqslant M\leqslant X$ 时有

$$M^{-1}\sum_{QM}\sum_{\chi}{}^{*}\max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi)|\ll Mz^{\frac{1}{2}}+z(\log z)^{-A-3}$$

$$+z(\log z)^{2A+20-B}.$$

因 $D=(\log z)^{A+3}$，所以由引 4 可知

$$\sum_{q\leqslant X}E^{*}(z,q)\ll z(\log z)^{-A}+z(\log z)^{2A+23+B},$$

取 $B=3A+23(>A+5)$，则得(1.11)，故得定理4.

4.本节我们将在定理 3 的基础上证明定理 5 .

命 Q 为一个正整数的有限集及命 M 与 D 由 (1.3) 与 (1.4)定义；又命

$$z = M^2, \tag{4.1}$$

$$Q(s,\chi) = \sum_{n \leqslant z} \chi(n)\mu(n)n^{-s}, \tag{4.2}$$

$$f(s,\chi) = L(s,\chi)Q(s,\chi)^{-1}. \tag{4.3}$$

我们定义

$$F(s) = \prod_{q \in Q} \prod_{\chi \neq \chi_0} (1 - f^2(s,\chi))^{e(\chi)}, \tag{4.4}$$

此处

$$e(\chi) = \frac{M!}{\phi(q)} |\tau(\chi)|_8^2. \tag{4.5}$$

因当 $\chi \neq \chi_0$ 时，$L(s,\chi)$为一个整函数及 $e(\chi)$为一个正整数，所以 $F(s)$为 s 的整函数，又当 s 为实数时，$F(s)$ 亦是实的，这由于

$$\overline{f(s,\chi)} = f(s,\bar{\chi}), |\tau(\bar{\chi})|^2 = |\tau(\chi)|^2.$$

我们将于以后证明，当M充分大时，在 $\sigma = 2$ 时有 $F(s) \neq 0$。我们用通常的方法来定义 $\arg F(\sigma+it)$（见帕拉哈〔4; p. 398〕）；由 $\arg F(2) = 0$ 沿路径$(2, 2+it, \sigma+it)$行走，当沿第二线段走时，若通过 $F(s)$一个 m 重零点，则 $\arg F(s)$ 增加 $-\pi m \operatorname{sgn} t$，即通过连续变分来定义 $\arg F(\sigma+it)$。

我们记

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x, \text{当 } x > 1, \\ 0, \text{其他情况}. \end{cases}$$

引 5，我们有

$$2\pi M! \int_\alpha^\beta \sum_{q \in Q} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |\tau(\chi)|^2 N(\sigma, T; \chi) d\sigma$$

$$\leqslant \int_{-T}^{T} \{\log|F(\alpha+it)| - \log|F(\beta+it)|\} dt$$

$$+\int_{\alpha}^{\beta}\{\arg F(\sigma+iT)-\arg F(\sigma-iT)\}d\sigma. \tag{4.6}$$

证：若 ρ 为 $L(s,\chi)$ 的一个 m 次零点，则 ρ 为 $1-f^2(s,\chi)$ 的一个零点，所以它是 $F(s)$ 的零点，其重数至少为 $me(\chi)$，因此由李特伍德的一条熟知定理（见帕拉哈〔4〕，）Anhang, Satz 8.1）。即得引 5。

引 6。当 $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 2$ 时有

$$\int_{\alpha}^{2}\{\arg F(\sigma+it)-\arg F(\sigma-it)\}d\sigma\leqslant M!+$$

$$\int_{0}^{2\pi}\log^{+}|F(2+it+(2-\alpha)e^{i\theta})|d\theta.$$

证：若 $\sigma>1$，则由(4.2)与(4.3)可知

$$f(s,\chi)=\sum_{n>z}\chi(n)A_z(n)n^{-s},$$

此处

$$A_z(n)=\sum_{\substack{d/n\\ d\leqslant z}}\mu(d),\ |A_z(n)|\leqslant d(n).$$

因此当 M 充分大时

$$|f(2+it,\chi)|^2\leqslant\left(\sum_{n>z}d(n)n^{-2}\right)^2\ll(z^{-1}\log z)^2.$$

从而 $|f(2+it,\chi)|$ 很小，这证明了较早的注记 $F(2+it)\neq 0$。

我们有

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)^2|\leqslant\sum_{q<M}q<M^2=z.$$

及

$$|\log(1-f^2(2+it,\chi)|\ll z^{-2}(\log z)^2;$$

故由(4.4)可知

$$|\log F(2+it)|\leqslant\sum_{q\in Q}\frac{M!}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq 0}|\tau(\chi)|^2|\log$$

$$(1-f^2(2+it,\chi))|\ll M!\,z^{-1}(\log z)^2\ll M!. \quad (4.7)$$

我们按梯其玛奇〔5; p.180〕方法的一般做法，对于固定 t，命

$$g_t(s)=\frac{1}{2}\{F(s+it)+F(s-it)\}; \quad (4.8)$$

则 $g_t(s)$为 s 的整函数及由反射原理得

$$g_t(\sigma)=RF(\sigma+it).$$

命 $n(r)$ 表示 $g_t(s)$在圆$|s-2|\leqslant T$ 中的零点个数，零点重数亦算在内，则当 $\sigma\leqslant 2$时，

$$|\arg F(\sigma+it)|\leqslant|\arg F(2+it)|+(N+1)\pi,$$

此处 N 为 $g_t(s)$在线段 $\sigma\leqslant s\leqslant 2$ 上的零点个数，则由(4.7)可知

$$|\arg F(\sigma+it)|\ll M!+n(2-\sigma).$$

由此及耶申公式可知当$\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 2$及 $g_t(2)\neq 0$时有

$$\int_\alpha^2|\arg F(\sigma+it)|d\sigma\ll M!+\int_0^{2-\alpha}n(r)dr$$

$$\ll M!+\int_0^{2-\alpha}r^{-1}n(r)dr$$

$$=M!+\frac{1}{2\pi}\int_0^2\log|g_t(2+(2-\alpha)e^{i\theta})|d\theta$$

$$-\log|g_t(2)|.$$

同时，由不等式

$$\log^{+}(a+b)\leqslant 2+\log^{+}a+\log^{+}b,$$

得

$$\int_0^{2\pi}\log^{-}|g_t(2+(2-\alpha)e^{i\theta})|d\theta\leqslant 4\pi$$

$$+\int_0^{2\pi}\log^{+}|F(2+it+(2-\alpha)e^{i\theta})|d\theta$$

$$+\int_0^{2\pi}\log^{+}|F(2-it+(2-\alpha)e^{-i\theta})|d\theta$$

$$\ll 1+\int_0^{2\pi}\log^{+}|F(2+it+(2-\alpha)e^{i\theta})|d\theta,$$

在此用到 $F(\sigma-it)$ 与 $F(\sigma+it)$ 为共轭复数，代入前面的不等式，则得引 6 的结果，在此需假定 $-\log|g_t(2)|\ll M_1$。考虑函数

$$h_t(s)=\frac{1}{2i}\{F(s+it)-F(s-it)\},$$

则我们免去这个假定，从而 $|F(2+it)|^2=|g_t(2)|^2+|h_t(2)|^2$，由(4.7) 得 $-\log|g_t(2)|\ll M_1$ 或 $-\log|h_t(2)|\ll M_1$。我们已处理了第一种情况，对于第二种情况，只要用 $h_t(s)$ 代替 $g_t(s)$，就可以用同法处理，引 6 证完。

引 7. 若 χ 为非主特征$(\bmod q)$，则对于 $\sigma\geqslant\frac{1}{2}x\geqslant 2q$ 与 $|t|\leqslant x/q$，

$$L(s,\chi)=\sum_{u\leqslant t}\chi(n)n^{-s}+O(qx^{-\sigma}) \qquad (4.9)$$

一致成立。

证：如通常一样，记

$$\zeta(s,w)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+w)^{-s},$$

此处 $0<w\leqslant 1,\sigma>1$，用熟知的方法（梯其玛奇〔5；§4.11 o §4.14〕）可知逼近式

$$\zeta(s,w)=\sum_{0<n\leqslant y}(n+w)^{-s}-\frac{y^{1-s}}{1-s}+O(y^{-\sigma})$$

对于 $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$，任意正整数 y 及 $|t|\leqslant\pi y$ 一致地成立。

我们有

$$L(s,\chi)=q^{-s}\sum_{a=1}^{q}\chi(a)\zeta(s,a/q),$$

将上面的逼近式代入并注意当 $\chi\neq\chi_0$ 时有 $\sum_{a=1}^{q}\chi(a)=0$，

所以

$$L(s,\chi)=\sum_{0<n\leqslant qy+q}\chi(n)n^{-s}+O(q^{1-\sigma}y^{-\sigma}),$$

取 $x=qy+q$，则得 $|t|\leqslant\pi y$，及当 x 为 q 的整数倍时有（4.9），因小于 q 项之和可以吸收入 $O(qx^{-\sigma})$ 之中，所以后面的条件可以取消。

引 8 . 我们有

$$\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2\left|f\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|$$

$$\ll D(M^2+M|t|)\log^2(M+|t|).\qquad(4.10)$$

证：由(4.3)可知

$$|f(s,\chi)|\leqslant 1+|L(s,\chi)Q(s,\chi)|\leqslant 1+$$

$$\frac{1}{2}|L(s,\chi)|^2+\frac{1}{2}|Q(s,\chi)|^2.$$

因此(4.10)左端之和$\leqslant\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$，此处

$$\Sigma_1=\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2,$$

$$\Sigma_2=\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2,$$

$$\Sigma_3=\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2\left|Q\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2.$$

因$|\tau(\chi)|^2\leqslant q$，所以$\Sigma_1\leqslant M^2$。

现在考虑Σ_3，我们有

$$Q\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)=\sum_{n\leqslant z}\chi(n)\mu(n)n^{-\frac{1}{2}-it},$$

运用定理3并置$Y=0$，$Z=z$，$a_n=\mu(n)n^{-\frac{1}{2}-it}$，则得

$$\Sigma_3\ll D\max(z,M^2)\sum_{n\leqslant z}d(n)n^{-1}\ll DM^2(\log M)^2.$$

只剩下Σ_2，我们首先用一个有限和来逼近$L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)$；在引7中取$x=M^2+M|t|$及$q\leqslant M$，由于$x\geqslant 2q$及$|t|\leqslant x/q$，所以这是可能的，故得

$$\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2\ll\left|\sum_{n\leqslant x}\chi(n)n^{-\frac{1}{2}-it}\right|^2+1.$$

再用定理3，并取$Y=0$，$Z=x$，$a_n=n^{-\frac{1}{2}-it}$，则得

$$\Sigma_2 \ll \Sigma_1 + \sum_{q \in Q} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |\tau(\chi)|^2 \left| \sum_{n \leq x} \chi(n) n^{-\frac{1}{2}-it} \right|^2$$

$$\ll M^2 + D\max(x, M^2) \sum_{n \leq x} d(n) n^{-1}$$

$$\ll D(M^2 + M|t|)\log^2(M + |t|).$$

将 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 的估计加起来即得(4.10)。

引 9，对于 $\sigma \geqslant 1$，下式一致成立

$$\sum_{q \in Q} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |\tau(\chi)|^2 |f(\sigma + it, \chi)|^2$$

$$\ll D\log^9(M + |t|).$$

证：如前面的证明一样，命 $x = M^2 + M|t|$，则由引 7 可知

$$f(\sigma + it, \chi) = \left(\sum_{n \leq x} \chi(n) n^{-\sigma - it} \right)$$

$$\left(\sum_{n \leq z} \chi(n) \mu(n) n^{-\sigma - it} \right)^{-1}$$

$$+ O(Mx^{-\sigma} |Q(\sigma + it, \chi)|)$$

$$= \sum_{z < n \leq zx} \chi(n) a_n(x, z) n^{-\sigma - it}$$

$$+ O(M^{1-2\sigma} |Q(\sigma + it, \chi)|),$$

此处 $a_n(x, z) = \Sigma \mu(d)$，其中 $d | n$，$nx^{-1} \leqslant d \leqslant z$。

将这个引理中的和记为 S，则得

$$S \ll S_1 + M^{2-4\sigma} S_2,$$

此处

$$S_1 = \sum_{q \in Q} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |\tau(\chi)|^2$$

$$\left|\sum_{z<n\leqslant zx}\chi(n)a_n(x,z)n^{-\sigma-it}\right|^2,$$

$$S_2=\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2|Q(\sigma+it,\chi)|^2.$$

将定理3用于S_2，并置$Y=0,Z=z,a_n=\mu(n)n^{-\sigma-it}$，则得

$$S_2\ll D\max(z,M^2)\sum_{n\leqslant z}d(n)n^{-2\sigma}\ll DM^2.$$

现在考虑S_1，我们将区间$z<n\leqslant zx$分成$\ll\log x$个小区间$(2^{h-1}z,2^hz)$,$h=1,2,\cdots,h_0$,再加上一个部分区间$(2^{h_0}z,xz)$,由柯西不等式得

$$\left|\sum_{z<n\leqslant zx}\chi(n)a_n(x,z)n^{-\sigma-it}\right|^2\ll(\log x)$$

$$\sum_{h=1}^{h_0+1}\left|\sum_{2^{h-1}z<n\leqslant 2^hz}\chi(n)a_n(x,z)n^{-\sigma-it}\right|^2,$$

此处按惯例当$h=h_0+1$时，内和中n的上界为xz.这给出有h_0+1个和的S_1的不等式，其中典型的一个为

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}|\tau(\chi)|^2\left|\sum_{2^{h-1}z<n\leqslant 2^hz}\chi(n)a_n(x,z)\right.$$

$$\left.n^{-\sigma-it}\right|^2.$$

对于每个这种和，我们用定理3，其中$Y=2^{h-1}z,Z=2^hz$(或xz),$a_n=a_n(x,z)n^{-\sigma-it}$，注意$|a_n(x,z)|\leqslant d(n)$及

$$\sum_{n=1}^{N}d^3(n)\ll N(\log N)^7$$

与$\log(2^hz)\ll\log x$，所以上面最后一个和有估计

$$D\max(2^{l-1}z, M^2)\sum_{2^{l-1}z<n\le 2^h z} d(n)a_n^2(x,z)$$

$$n^{-2\sigma}\ll D2^h z\sum_{2^{l-1}z<n\le 2^h z} d^3(n)n^{-2\sigma}$$

$$\ll D(2^h z)^{1-2\sigma}\sum_{n=1}^{2^h z} d^3(n)$$

$$\ll D(2^h z)^{2-2\sigma}(\log x)^7$$

$$\ll Dz^{2-2\sigma}(\log x)^7,$$

代入S_1，则得

$$S_1\ll(\log x)\sum_{h=1}^{h_0} Dz^{2-2\sigma}(\log x)^7\ll D(\log x)^9.$$

结合所有这些结果即得引 9

引10．命$f_1(s)$，…，$f_K(s)$为带状区域$\alpha<\sigma<\beta$中的正则函数，在其边界上，它们是连续的，假定当$|t|\to\infty$时，它们对于σ皆一致$\to 0$．命c_1，…，c_K为正整并定义

$$J(\sigma;\lambda)=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{K}c_k|f_k(\sigma+it)|^{1/\lambda}dt\right\}^{\lambda},$$

(4.11)

则

$$J(\sigma;\lambda u+\mu v)\leqslant J(\alpha;\lambda)^u J(\beta;\mu)^v, \qquad (4.12)$$

此处

$$u=(\beta-\sigma)/(\beta-\alpha),\ v=(\sigma-\alpha)/(\beta-\alpha).$$

证：当$K=1$时，这是茄布利尔(Gabriel)〔6〕定理、他的证明推广到一般情况是不困难的，在证明茄布利尔的定理1

时，我们用

$$\int_{AB}\sum_{k=1}^{K}c_k\phi_k(z)\bar{\phi}_k(z)dz$$

代替他的$\int\phi(z)\bar{\phi}(z)dz$，除增加利用赫德尔(Hölder)不等式外，均按原来同样的证明方法，这是仅需作的稍本质的改动。

为简单计，我们记

$$\Phi(\alpha,T)=\int_{-t}^{T}\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2$$

$$|\log^+|1-f^2(\alpha+it,\chi)|dt. \tag{4.13}$$

引 11. 关系式

$$\Phi(\alpha,T)\ll DT(M^2+MT)^{4(1-\ )(3-2\ )}$$

$$\log^9(M+T) \tag{4.14}$$

对于$\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant1$，$T\geqslant2$一致成立；而

$$\Phi(\alpha,T)D\ll T\log^9(M+T) \tag{4.15}$$

对于$\alpha\geqslant1$，$T\geqslant2$一致成立。

证：对于$T\geqslant4$，置

$$f_T(s,\chi)=f(s,\chi)/\cos(s/T),$$

$$J_T(\sigma;\lambda)=\left\{\int_{-}^{\infty}\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2\right.$$

$$\left.|f_T(\sigma+it,\lambda|^{1/\lambda}dt\right\}^{\lambda}.$$

对于$T\geqslant4$，$\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant1$，我们有

$$\frac{1}{2}\exp(|t|/T)\leqslant|\cos(s/T)|\leqslant\exp(|t|/T),$$

(4.16)

所以 $f_1(s,\chi)$ 为 $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1$ 中 s 的正则函数及当 $|t|\to\infty$ 时，

于区域 $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1$ 中一致地 $\longrightarrow O$。

由(4.16)及引 8 可知

$$J_T\left(\frac{1}{2};1\right)\ll\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t|/T}\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}$$

$$|\tau(\chi)|^2\left|f\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|dt$$

$$\ll\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t|/T}D(M^2+M|t|)\log^2(M+|t|)dt$$

$$\ll DT(M^2+MT)\log^2(M+T).$$

同理，由引 9 得

$$J_T\left(I;\frac{1}{2}\right)\ll\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2|t|/T}\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\right.$$

$$\left.|\tau(\chi)|^2|f(1+it,\chi)|^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll\{DT\log^9)M+T)\}^{\frac{1}{2}}.$$

用引 10 两个变元的凸定理，并置

$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=1,\ \lambda=1,\ \mu=\frac{1}{2},=\mu 2(1-\sigma),$$

$$v=2\sigma-1,$$

$$c_k=\frac{1}{\phi(q)}|\tau(\chi)|^2, f_k(s)=f_1(s,\chi),$$

则得

$$J_T\left(\sigma;\frac{3}{2}-\sigma\right)\ll\{DT(M^2+MT)\log^2$$

$$(M+T)\}^{2-2\sigma}\{DT\log^9(M+T)\}^{\sigma-\frac{1}{2}}$$

$$\ll\{DT\log^9(M+T)\}^{\frac{3}{2}-\sigma}(M^2+MT)^{2-2\sigma}, \tag{4.17}$$

对于$\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant1$，$T\geqslant4$一致成立.

对于每个复数w及$\frac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant1$中每个λ皆有

$$\log^+|1-w^2|\ll|w|^{1-\lambda}, \tag{4.18}$$

因此由(4.13)中$\Phi(\alpha,T)$的定义可知

$$\Phi(\sigma,T)\ll\int_{-T}^{T}\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2$$

$$|f(\sigma+it,\chi)|^{1/(\frac{3}{2}-\sigma)}dt$$

对于$\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant1$成立，由(4.16)我们可以引进一个因子

$$|\cos((\sigma+it)/T)|^{-1/(\frac{3}{2}-\sigma)}$$

于积分之中，这相当于将$f(\sigma+it,\chi)$换成$f_1(\sigma+it,\chi)$. 所以

$$\Phi(\sigma,T)\ll\left\{J_T\left(\sigma;\frac{3}{2}-\sigma\right)\right\}^{1/(\frac{3}{2}-\sigma)},$$

现在引11的第一个结论，即(4.14)可以由(4.17)推出.

为了得到第二个结论，即(4.15)，我们再用不等式(4.18)，由它推出

$$\Phi(\alpha,T)\ll\int_{-T}^{T}\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2$$

$|f(\alpha+it,\chi)|^2dt.$

当 $\alpha\geqslant1$ 时，(4.15)由引 9 立刻推出，引 11 证完。

定理 5 的证明，为简单计，我们记

$$N_Q(\sigma,T)=\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2N(\sigma,T;\chi).$$

由引 5 与并取 $\beta=2$；由引 6 及(4.7)得

$$2\pi M_!\int_\alpha^2N_Q(\sigma,T)d\sigma$$

$$\leqslant\int_{-T}^{T}\{\log|F(\alpha+it)|-\log|F(2+it)|\}dt$$

$$+\int_\alpha^2\{\arg F(\sigma+it)-\arg F(\sigma-it)\}d\sigma$$

$$\ll\int_{-t}^{t}\log^+|F(\alpha+it)|dt$$

$$+\int_0^{2\pi}\log^+|F(2+iT+(2-\alpha)e^{i\theta})|d\theta+M_!T.$$

(4.19)

固定 σ，函数 $N_Q(\sigma,T)$为 T 的非递减函数，关于 T，从 0 至 $2T$ 积分(4.19)得

$$2\pi M_!T\int_\alpha^2N_Q(\sigma,T)d\sigma\leqslant2\pi M_!\int_0^{2T}$$

$$\int_\alpha^2N_Q(\sigma,U)d\sigma dU$$

$$\ll\int_0^{2T}\int_{-U}^{U}\log^+|F(\alpha+it)|dtdU$$

$$+\int_0^2\int_0^{2\pi}\log^+|F(2+iU+(2-\alpha)e^{i\theta})|d\theta dU$$

$$+M_!T^2. \tag{4.20}$$

显然

$$\int_0^{2T}\int_{-U}^{U}\log^+|F(\alpha+it)|dtdU$$

$$\leqslant 2T\int_{-2T}^{2T}\log^+|F(\alpha+it)|dt,$$

及

$$\int_0^{2T}\int_0^{2\pi}\log^+|F(2+iU+(2-\alpha)e^{i\theta})|d\theta dU$$

$$\leqslant 2\pi\max_{\theta}\int_0^{2T}\log^+|F(2+iU+(2-\alpha)e^{i\theta})|dU$$

$$\ll \max_{\alpha\leqslant\sigma\leqslant 4}\int_0^{2T+2}\log^+|F(\sigma+it)|dt.$$

将这些结果用于(4.20)，我们得

$$M!\int_\alpha^2 N_Q(\sigma,T)d\sigma \ll M!T$$

$$+\max_{\alpha\leqslant\sigma\leqslant 4}\int_{-2T-2}^{2T+2}\log^+|F(\sigma+it)|dt. \quad (4.21)$$

由于

$$\log^+|F(s)|=\log^+\prod_{q\in Q}\prod_{\chi\neq\chi_0}|1-f^2(s,\chi)|^{\theta(\chi)}$$

$$\leqslant M!\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2\log^+|1-f^2(s,\chi)|.$$

所以由(4.13)关于 $\Phi(\alpha,T)$ 的定义可知

$$\int_{-2T-2}^{2T+2}\log^+|F(\sigma+it)|dt\leqslant M!\Phi(\sigma,2T+2).$$

因此由(4.21)与引11可知当 $T\geqslant 2$ 及 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时有

$$\int_\alpha^2 N_Q(\sigma,T)d\sigma$$

$$\ll DT(M^2+MT)^{4(1-\alpha)/(3-2\alpha)}$$

$$\log^9(M+T), \tag{4.22}$$

固定 T，$N_Q(\sigma,T)$是σ的非递增函数，所以若$0<\delta<1$，则当$T\geqslant 2$及$\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$时有

$$N_Q(\alpha+\delta,T)\leqslant\delta^{-1}\int_{\alpha}^{\alpha+\delta}N_Q(\sigma,T)d\sigma$$
$$\ll\delta^{-1}DT(M^2+MT)^{4(1-\ )\ (3-2\alpha)}$$
$$\log^9(M+T).$$

取

$$\delta=\frac{1}{\log}(M+T),$$

并注意

$$4(1-\alpha)/(3-2\alpha)=4(1-\alpha-\delta)$$
$$/(3-2\alpha-2\delta)+O(\delta),$$

及

$$(M^2+MT)^{\delta}=O(1),$$

即可知

$$N_Q(\alpha,T)\ll DT(M^2+MT)^{4(1-\ )\ (3-2\ )}$$
$$\log^{10}(M+T) \tag{4.23}$$

对于$\frac{1}{2}+\delta\leqslant\alpha\leqslant 1$一致成立。

我们还有

$$\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}|\tau(\chi_0)|^2N(\alpha,T;\chi_0)=N(\alpha,T)$$

$$\sum_{q\in Q}\frac{\mu^2(q)}{\phi(q)}\ll T(\log T)(\log M), \tag{4.24}$$

此处如通常一样，$N(\alpha,T)$表示$\zeta(s)$在矩形$\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1, |t|\leqslant T$中的零点个数，将(4.23)与(4.24)相加，即得定理5的结论，即(1.14)对于$\frac{1}{2}+\delta\leqslant\alpha\leqslant 1$时成立。

最后，假定$\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}+\delta$，由一个熟知结果（帕拉哈〔4; p、223〕）得

$$\sum_{\chi} N(\alpha,T;\chi) \ll \phi(q) T\log(M+T).$$

因此

$$\sum_{q\subset Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}|\tau(\chi)|^2 N(\alpha,T;\chi)$$

$$\ll \sum_{q\subset Q} qT\log(M+T) \ll M^2 T\log(M+T).$$

当$\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}+\delta$时，这个不等式比（1.14）为优，注意到$\delta$的定义即得定理5。

我们来推导(1.17)与(1.18)每个特征（$\chi \bmod q$）都是由原特征$\chi^*(\bmod q^*)$引起的，此处$q^*|q$及

$$N(\alpha,T;\chi)=N(\alpha,T;\chi^*).$$

对于给定q^*，q的值最多为X/q^*，所以

$$\sum_{q<X}\sum_{\chi} N(\alpha,T;\chi) \leqslant \sum_{q^*<X} X/q^* \sum_{\chi^*} N(\alpha,T;\chi^*).$$

将过q^*的和分成诸区间$(2^h, 2^{h+1})$，则得估计

$$(\log X)\max_{M\leqslant X} XM^{-1}\sum_{q^*\leqslant M}\sum_{\chi^*} N(\alpha,T;\chi^*)$$

$$\ll \max_{M\leqslant X} XM^{-1}T(M^2+MT)^{\beta}(XT)^{\varepsilon},$$

此处 $\beta=4(1-\alpha)/(3-2\alpha)$，这个式子

$$\ll \max(X^{1+\varepsilon}T^{1+\beta+\varepsilon},X^{2\beta+\varepsilon}T^{1+\varepsilon}).$$

因 $T\leqslant X^{\frac{1}{2}}$，所以

$$T^{\beta}\leqslant X^{2(1-\alpha)\ (3-2\alpha)}\leqslant X^{2(1-\alpha)}.$$

还有 $2\beta\leqslant 1+2(1-\alpha)$，故得(1.17)．当 $\frac{5}{6}\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时，我们注意到 $\beta\leqslant 1/2$，故得(1.18)．

本文结束之际，我们关于定理 5 作两点注记，我们可能往证很多其他类似的不等式，例如

$$\sum_{q\in Q}1/\phi(q)\sum_{\chi}|\tau(\chi)|^2N(\alpha,T;\chi)$$

$$\ll DT^2M^{5(1-\alpha)}\log^{10}(M+T),$$

当 $\alpha>\frac{7}{11}$ 及 T 不太大时，它比定理 5 为优．定理 5的不等式类似于英格姆（Ingham）的另一个结果（见梯其玛奇〔5; Theorem 9.19（B)〕），在理想的状态下，它给出整个区间 $T\ll M^{1+\varepsilon}$ 一个有用的界；这似乎在定理 4 的证明中是很本质的．

参 考 文 献

1. K. F. Roth, "On the large sieve of Linnik and Rényi", Mathematatika, 12(1965), 1—9.

2. Yu. V. Linnik, "The large sieve", Doklady Akad. Nauk SSSR, 30(1941), 292-294(in Russian).

3. A. Rényi, "On the representation of an even number as the sum of a single prime and an almost prime number", Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 12 (1948), 57-78 (in Russian); also American Math. Soc. Translations(2), 19(1961), 299-321

4. K. Prachar, Primzahlverteilung(Springor, 1957).

5. E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function(Oxford, 1951).

6. R. M. Gabriel, "Some results concerning the integrals of moduli of regular functions along certain curves", Journal London Math. Soc, 2(1927), 112-117.

编者注：由前面王元的文章中的附录的方法及定理 4，立即得出(1,3)。

18. 大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和

陈 景 润

摘 要

本文的目的在于用筛法证明了：每一充分大的偶数是一个素数及一个不超过两个素数乘积之和。

关于孪生素数问题亦得到类似的结果。

一、引　　言

把命题"每一个充分大的偶数都能表示为一个素数及一个不超过 a 个素数的乘积之和"简记为$(1,a)$。

不少数学工作者改进了筛法及素数分布的某些结果，并用以改善$(1,a)$。现在我们将$(1,a)$发展历史简述如下：

$(1,c)$——Renyi[1]，

$(1,5)$——潘承洞[2]、Барбан[3]，

$(1,4)$——王元[40]、潘承洞[5]、Барбан[6]，

$(1,3)$——Бухштаб[7]、Виноградов[8]、Bombieri[9]，

在文献〔10〕中我们给出了$(1,2)$的证明提要。

命 $P_x(1,2)$为适合下列条件的素数 p 的个数：

$$x-p=p_1\text{或}x-p=p_2p_3,$$

其中 p_1,p_2,p_3 都是素数。

用 x 表一充分大的偶数。命

$$C=\prod_{\substack{p\mid x\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

对于任意给定的偶数 h 及充分大的 x，用 $x_h(1,2)$ 表示满足下面条件的素数 p 的个数：

$$p\leqslant x,\ p+h=p_1\ \text{或}\ p+h=p_2p_3,$$

其中 $p1,p_2,p_3$ 都是素数。

本文目的在于证明并改进作者在文献〔10〕内所提及的全部结果，现在详述如下。

定理1.（1,2）及$P_x(1,2)\geqslant\frac{0.67xC_x}{(\log x)^2}$.

定理2.对于任意偶数h，都存在无限多个素数p，使得$p+h$的素因子的个数不超过2个及$x_h(1,2)\geqslant\frac{0.67xC_h}{(\log x)^2}$.

在证明定理1时，主要用到了本文中的引理8和引理9.在证明引理8时，我们使用较为简单的数字计算方法；而证明引理9时，我们使用了Bombieri定理[9]及Richert[11]中的一个结果.

二、几 个 引 理

引理1.假设$y\geqslant 0$，而$[\log x]$表示$\log x$的整数部分，$x>1$，

$$\Phi(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{y^{\omega}d\omega}{\omega\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{[\log x]+1}}$$

显见，当$0\leqslant y\leqslant 1$时，有$\Phi(y)=0$。对于所有$y\geqslant 0$，则$\Phi(y)$是一个非减函数，当$\log x\geqslant 10^4$及$y\geqslant e^{2(\log x)^{-0.1}}$时，则有

$$1-x^{-0.1}\leqslant\Phi(y)\leqslant 1.$$

证。我们先来证明

$$\frac{\partial^r}{\partial\omega^r}\left(\frac{y^{\omega}}{\omega}\right)=\left(\frac{y^{\omega}}{\omega}\right)\left\{(\log y)^r+\sum_{i=i}^{r}\frac{(-1)^i\cdots(r-i+1)(\log y)^{r-i}}{\omega^i}\right\}\qquad(1)$$

成立，显见，（1）式当$r=1$和$r=2$时都成立。现假定(1)

式对于 $r=2,\cdots,S$ 时都成立，而证明对于 $S+1$ 也成立，由于

$$\frac{\partial^{S+1}}{\partial\omega^{S+1}}\left(\frac{y^{\omega}}{\omega}\right)=\frac{\partial}{\partial\omega}\left\{y^{\omega}\left(\frac{(\log y)^{S}}{\omega}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\sum_{i=1}^{S}\frac{(-1)^{i}S\cdots(S-i+1)(\log y)^{S-i}}{\omega^{i+1}}\right)\right\}$$

$$=y^{\omega}\left\{\frac{(\log y)^{S+1}}{\omega}\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{S}\frac{(-1)^{i}S\cdots(S-i+1)(\log y)^{S+1-i}}{\omega^{i+1}}$$

$$-\frac{(\log y)^{S}}{\omega^{2}}$$

$$\left.\sum_{i=1}^{S}\frac{(-1)^{i+1}S\cdots(S-i+1)(i+1)(\log y)^{S-i}}{\omega^{i+2}}\right\}$$

$$=\left(\frac{y^{\omega}}{\omega}\right)\left\{(\log y)^{S+1}\right.$$

$$-\frac{(S+1)(\log y)^{S}}{\omega}+\frac{(-1)^{S+1}(S+1)!}{\omega^{S+1}}$$

$$+\sum_{i=2}^{S}\left(\frac{(-1)^{i}S\cdots(S-i+1)(\log y)^{S+1-i}}{\omega^{i}}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(-1)^{i}S\cdots(S+2-i)i(\log y)^{S+1-i}}{\omega^{i}}\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{y^{\omega}}{\omega}\right)\left\{(\log y)^{S+1}\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{[\log x]}\frac{(-1)^i(S+1)\cdots(S+1-i+1)(\log y)^{S+1-i}}{\omega^i}\Bigg\}.$$

故(1) 式得证。

又当 $y\geqslant 1$ 时，我们有

$$\Phi(y)=1+\left\{\frac{(\log x)^{1.1+1.1[\log x]}}{[\log x]!}\right\}$$

$$\left\{\frac{\partial^{[\log x]}}{\partial\omega^{[\log x]}}\left(\frac{y^{\omega}}{\omega}\right)\right\}_{\omega=-(\log x)^{1.1}}$$

$$=1-e^{-(\log x)^{1.1}(\log y)}\sum_{\nu=0}^{[\log x]}\frac{\{(\log x)^{1.1}(\log y)\}^{\nu}}{\nu!}$$

$$=\left\{\frac{1}{[\log x]!}\right\}\int_0^{(\log x)^{1.1}(\log y)}e^{-\lambda}\lambda^{[\log x]}d\lambda.$$

因为 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，$\Phi(y)=0$。故由上式得到：当 $y\geqslant 0$ 时，则 $\Phi(y)$ 是一个非减函数。又当 $y\geqslant e^{2(\log x)^{-1.0}}$ 时，有

$$0<1-\Phi(y)=\left\{\frac{1}{[\log x]!}\right\}$$

$$\int_{(\log x)^{1.1}(\log y)}^{\infty}e^{-\lambda}\lambda^{[\log x]}d\lambda$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{[\log x]!}\right\}\int_{2[\log x]}^{\infty}e^{-\lambda}\lambda^{[\log x]}d\lambda$$

$$=\left\{\frac{([\log x])^{1+[\log x]}}{[\log x]!}\right\}$$

$$\cdot\int_2^{\infty}e^{-\lambda[\log x]}\lambda^{[\log x]}d\lambda$$

$$=\left\{\frac{e^{-[\log x]}([\log x])^{1+[\log x]}}{[\log x]!}\right\}$$

$$\cdot \int_1^{\infty} e^{-\lambda \log x}(1+\lambda)^{[\log x]} d\lambda \leqslant x^{-0.1}.$$

其中用到 $\log x \geqslant 10^4$ 及当 $\lambda \geqslant 1$ 时，有 $e^{\cdot\ \circ}(1+\ ) \leqslant e^{\lambda \log 2}$.

引理 2. 令 $e(\alpha)=e^{2\pi i\alpha}$, $S(\alpha)=\sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n\alpha)$, $Z=\sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2$, 其中 a_n 是任意的实数. 我们用令 $\sum_{\chi_q}^{*}$ 来表示和式之中经过且只经过模 q 的所有原特征，则有

$$\sum_{q \leqslant X} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi_q(n) \right|^2 \leqslant (X^2+\pi N) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2; \tag{2}$$

$$\sum_{D<q \leqslant Q} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi_q(n) \right|^2 \ll \left(Q+\frac{N}{D} \right) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2. \tag{3}$$

证：令 F 是一个周期为 1 的复数值可微函数，则有 $\left|F\left(\frac{a}{q}\right)\right| = \left| F(\alpha) - \int_{\frac{a}{q}}^{\alpha} dF(\beta) \right| \leqslant |F(\alpha)| + \int_{\frac{a}{q}}^{\alpha} |F'(\beta)||d\beta|$, 我们用 $I(a, q)$ 来表示以 $\frac{a}{q}$ 为中心，而长度 $\frac{1}{Q^2}$ 的区间，显见，当 $1 \leqslant a < q$, $(a,q)=1$, $q \leqslant Q$ 时，所有的区间 $I(a,q)$ 都没有共同部分，故得

$$\sum_{q<Q}\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leq a<q}}\left|F\left(\frac{a}{q}\right)\right|\leqslant\sum_{q<Q}\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leq a<q}}\left\{Q^2\right.$$

$$\left.\int_{I(a,q)}|F(\alpha)|d\alpha+\frac{1}{2}\int_{I(a,q)}|F'(\beta)|d\beta\right\}$$

$$\leqslant Q^2\int_0^1|F(\alpha)|\,d\alpha+\frac{1}{2}\int_0^1|F'(\beta)|d\beta.$$

我们取 $F(\alpha)=\{S(\alpha)\}^2$，则得

$$\int_0^1|F(\alpha)|d\alpha=Z\text{ 及 }\frac{1}{2}\int_0^1|F'(\beta)|d\beta=$$

$$\int_0^1|S(\alpha)||S'(\alpha)|d\alpha$$

$$\leqslant\left\{\left(\int_0^1|S(\alpha)|^2d\alpha\right)\left(\int_0^1|S'(\alpha)|^2d\alpha\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=Z^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1|S'(\alpha)|^2d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}.$$

故有

$$\sum_{q<Q}\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leq a<q}}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2=\sum_{q\leq Q}\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leq a<q}}$$

$$\left\{\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|\left|e\left(-\frac{a\left(M+\left[\frac{N}{2}\right]\right)}{q}\right)\right|\right\}^2$$

$$=\sum_{q<Q}\sum_{\substack{(a;q)=1\\1\leq a<q}}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_ne\left(\left\{n-\left(M\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\left[\frac{N}{2}\right]\right)\right\}\frac{a}{q}\right)\right|^2$$

$$= \sum_{q\leqslant Q} \sum_{\substack{(a,q)=1\\ 1\leqslant a\leqslant q}} \Big| \sum_{-[\frac{N}{2}]+1\leqslant n\leqslant N-[\frac{N}{2}]} a_{n+M+[\frac{N}{2}]} e\left(\frac{na}{q}\right)\Big|^2$$

$$\leqslant ZQ^2 + Z^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=-[\frac{N}{2}]+1}^{N-[\frac{N}{2}]} ((2\pi n) a_{n+M+[\frac{N}{2}]})^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant ZQ^2 + \pi N Z^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-[\frac{N}{2}]+1}^{N-[\frac{N}{2}]} \left|a_{n+M+[\frac{N}{2}]}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant (Q^2+\pi N)Z。 \tag{4}$$

令 χ^* 表示原特征，$\tau(\chi_q^*) = \sum\limits_{1\leqslant a<q} \chi_q^*(a) e\left(\frac{a}{q}\right)$，$\tau(\overline{\chi_q^*})\chi_q^*(n) = \sum\limits_{a=1}^{q} \overline{\chi_q^*}(a) e\left(\frac{na}{q}\right)$. 由于 $|\tau\overline{\chi}_q^*)|^2 = q$，故得到

$$\left(\frac{1}{\varphi(q)}\right) \sum_{\chi_q}{}^{*} \left|\sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi_q(n)\right|^2 \leqslant \left(\frac{1}{q\varphi(q)}\right) \sum_{\chi_q}{}^{*} \left|\tau(\overline{\chi_q}) \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi_q(n)\right|^2$$

$$= \left(\frac{1}{q\varphi(q)}\right) \sum_{\chi_q}{}^{*} \left|\sum_{a=1}^{q} \overline{\chi_q}(a) \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\frac{na}{q}\right)\right|^2$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{q\varphi(q)}\right) \sum_{\chi_q} \left|\sum_{a=1}^{q} \overline{\chi_q}(a) \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\frac{na}{q}\right)\right|^2$$

$$\leqslant \frac{1}{q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\frac{na}{q}\right) \right|^2.$$

由上式及(4)式，即得到(2)式，我们定义 h 是一个正整数，它使得 $2^h D < Q \leqslant 2^{h+1} D$，则我们有

$$\sum_{D<q\leqslant Q} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi_q(n) \right|^2$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{h} \left(\sum_{2^i D<q\leqslant 2^{i+1}D} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi_q(n) \right|^2 \right)$$

$$\sum_{i=0}^{h} \left(\frac{1}{2^i D} \right) \left(\sum_{2^i D<q\leqslant 2^{i+1}D} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \right.\right.$$

$$\left.\left. \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi_q(n) \right|^2 \right)$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{h} \left(2^{i+2} D + \frac{\pi N}{2^i D} \right) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2 \ll$$

$$\left(Q + \frac{N}{D} \right) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2.$$

故引理 2 得证。

引理 3. 当 $S=\sigma+it$ 和 $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ 时，则有

$$\sum_{q<Q} \sum_{\chi_q}{}^{*} |L(S,\chi_q)|^4 \ll Q^2 |S|^2 (\log Q)^4.$$

证：我们有

$$L(S,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

$$+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{i\leqslant n}\chi(i)-\sum\limits_{i\leqslant n-1}\chi(i)}{n^{s}}$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{\chi(n)}{n^{s}}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\sum_{i\leqslant n}\chi(i)\right)$$

$$\left(\frac{1}{n^{s}}-\frac{1}{(n+1)^{s}}\right)-\frac{\sum\limits_{i\leqslant N}\chi(i)}{(N+1)^{s}}$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{\chi(n)}{n^{s}}+O\left(\frac{|S|q^{\frac{1}{2}}\log q}{N^{\sigma}}\right).$$

故由引理 2 及 $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$，我们有

$$\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\chi_q}{}^{*}|L(S,\chi_q)|^{4}\ll\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\chi_q}{}^{*}$$

$$\left(\left|\sum_{n=1}^{[Q,S]}\frac{\chi_q(n)}{n^{s}}\right|^{4}+Q^{-2}|S|^{2}q^{2}(\log q)^{4}\right)$$

$$\ll|S|^{2}Q^{2}(\log Q)^{4}+(Q^{2}+Q^{2}|S|^{2})$$

$$\sum_{n=1}^{[Q,S]^{2}}\frac{d^{2}(n)}{n}\ll Q^{2}|S|^{2}(\log Q)^{4}.$$

故本引理得证。

引理 4. 当 k 是无平方因子的奇数，而 $m\neq1$ 时，则我们有

$$\left|\sum_{\chi_k}{}^{*}\chi_k(m)\right|\leqslant|(m-1,k)|.$$

证：令 $k=p_1\cdots p_l$，而 $p_1<\cdots<p_l$。令 g_j是$\bmod p_j$的原根，则有 $m\equiv g_j^{\xi_j}(\bmod p_j)$，$0\leqslant\xi_j\leqslant p_j-2, j=1,\cdots,l$，则关于模 k 的所有原特征可表示为

$$\chi_k^*(m)=e^{2\pi i\left(\frac{\nu_1\xi_1}{p_1-1}+\cdots+\frac{\nu_e\xi_e}{p_e-1}\right)}$$

其中 $1\leqslant\nu_l\leqslant p_j-2$，而 $j=1,\cdots,l$。

令 $Z(m,k)=\left|\sum_{\chi_k}^*\chi_k(m)\right|$，则有

$$Z(m,k)=\prod_{j=1}^{l}Z(m,pi)=\prod_{j=1}^{l}\left|\sum_{\nu_j=1}^{p_j-2}e^{2\pi i\frac{\nu_j\xi_j}{p_j-1}}\right|$$

$$=\prod_{\substack{j=1\\ \xi_j=0}}^{l}(p_j-2)<\prod_{p_l\mid(m-1)}p_j=|(m-1,k)|.$$

故本引理得证。

设 x 是偶数，令 $\lambda_1=1$；当 $d>x^{\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}}$时，令 $\lambda_d=0$；而当 $1<d\leqslant x^{\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}}$时，令

$$\lambda_d=\frac{\mu(d)}{f(d)g(d)}\left\{\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant(x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}}/d\\(k,xd)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}\right\}$$

$$\left\{\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant(x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}}\\(k,x)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}\right\}^{-1}.$$

其中 $g(k)=\frac{1}{\varphi(k)}$，$f(k)=\varphi(k)\prod_{p/k}\frac{p-2}{p-1}$。又当 d 为奇数，$\mu(d)\neq0$ 时，有

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant(x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}}\\(k,x)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}=\sum_{t/d}\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant(x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}}\\(k,d)=t\ (k,x)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}$$

$$=\sum_{t/d}\left\{\frac{1}{\prod_{p/t}(p-2)}\right\}\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant (x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}}/t\\(k,xd)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}$$

$$\geqslant\left\{\prod_{p/d}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)\right\}\left\{\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant (x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}}/d\\(k,xd)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}\right\}.$$

故对于所有正整数 d，都有 $|\lambda_d|\leqslant 1$。设 x 是偶数，$\log x>10^4$，又令 $Q=\prod_{2<p<x^{\frac{1}{4}}}p$，

$$Q=\sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<(\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}}\\p_3<\frac{x}{p_1p_2}\\(x-p_1p_2p_3,Q)=1}}1,$$

$$M=\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<(\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)$$

$$\left(\sum_{\substack{n<\frac{x}{p_1p_2}\\(x-p_1p_2n,Q)=1}}\Lambda(n)\right),$$

则有 $Q\leqslant\frac{M}{1-\varepsilon}+N$，其中 $N\ll\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<(\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}}}$

$$\left(\frac{x}{p_1p_2}\right)^{1-\varepsilon}\ll x^{1-\varepsilon}\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{dS}{S^{1-\varepsilon}}\int_{x^{\frac{1}{3}}}^{(\frac{x}{S})^{\frac{1}{2}}}\frac{dt}{t^{1-\varepsilon}}$$

$$\ll x^{1-\frac{\varepsilon}{2}}\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{dS}{S^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}\ll x^{1-\frac{\varepsilon}{3}}.$$

由引理1，我们有

$$M \leqslant \sum_{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 \leqslant \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}} \right)$$

$$\sum_{\substack{n < \frac{x}{p_1 p_2} \\ (x - p_1 p_2 n, Q) = 1}} \Lambda(n) \Phi\left(\frac{x}{p_1 p_2 n} \right)$$

$$+ O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}} \right)$$

$$\leqslant \sum_{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 \leqslant \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}} \right)$$

$$\sum_{n < \frac{x}{p_1 p_2}} \Lambda(n) \Phi\left(\frac{x}{p_1 p_2 n} \right) \left(\sum_{\substack{d / (x - p_1 p_2 n, Q) \\ (d, x) = 1}} \lambda_d \right)^2$$

$$+ O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}} \right) = \sum_{\substack{(d_1, x) = 1 \\ d_1 / Q}} \sum_{\substack{(d_2, x) = 1 \\ d_2 / Q}}$$

$$\lambda_{d_1} \lambda_{d_2} N_{\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}} \right). \qquad (5)$$

其中

$$N_{\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}} = \sum_{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 < \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}} \right)$$

$$\sum_{\substack{n < \frac{x}{p_1 p_2} \\ x - p_1 p_2 n \equiv 0 \left(\bmod \frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}\right)}} \Lambda(n) \Phi\left(\frac{x}{p_1 p_2 n} \right)$$

$$
= \left\{\frac{1}{\varphi\left(\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}\right)}\right\}\left\{\sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 < \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ n < \frac{x}{p_1 p_2} \\ (p_1 p_2 n,\, d_1 d_2) = 1}}\right.
$$

$$
\left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}}\right) \Lambda(n)\, \Phi\left(\frac{x}{p_1 p_2 n}\right)
$$

$$
+ \sum_{\chi_{\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}} \neq \chi_0} \overline{\chi_{\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}}}(x) \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 < \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ n < \frac{x}{p_1 p_2}}}
$$

$$
\left.\left(\frac{\Lambda(n)}{\log \frac{x}{p_1 p_2}}\right) \Phi\left(\frac{x}{p_1 p_2 n}\right) \chi_{\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}}(p_1 p_2 n)\right\}
$$

$$
= \left\{\frac{1}{\varphi\left(\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}\right)}\right\}\left\{\sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 < \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ n < \frac{x}{p_1 p_2} \\ (p_1 p_2 n,\, d_1 d_2) = 1}}\right.
$$

$$
\left.\left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}}\right) \Lambda(n)\, \Phi\left(\frac{x}{p_1 p_2 n}\right)\right\}
$$

$$
- \left\{\frac{1}{2\pi i \varphi\left(\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}\right)}\right\}
$$

$$
\cdot \left\{\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left(1 + \frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\right.
$$

$$
\left(\frac{x^{\omega}}{\omega}\right) \sum_{\chi_{\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}} \neq \chi_0} \overline{\chi_{\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}}}(x)\, \frac{L'}{L}\left(\omega, \chi_{\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}}\right)
$$

$$\cdot \sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \chi_{\frac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)}}(p_1 p_2)$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1 p_2}}\right)\left(\frac{d\omega}{(p_1 p_2)^{\omega}}\right)\Bigg\}. \qquad (6)$$

令

$$M_1=\sum_{(d_1,x)=1}\sum_{(d_2,x)=1}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{\varphi\left(\frac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)}\right)}$$

$$\sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\ n<\frac{x}{p_1 p_2}}}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1 p_2}}\right)\Lambda(n)\,\Phi\left(\frac{x}{p_1 p_2 n}\right),$$

$$M_2=\sum_{\substack{d<x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\\ (d,x)=1}}\frac{|\mu(d)3|^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\Bigg|\sum_{\chi_d\neq\chi_0}\overline{\chi_{d^*}^*}(x)$$

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(\frac{x^{\omega}}{\omega}\right)\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}$$

$$\cdot\frac{L'}{L}(\omega,\chi_{d^*}^*)\sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1\leqslant x^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\ (p_1 p_2,d)=1}}$$

$$\chi_{d^*}^*(p_1 p_2)\left((p_1 p_2)^{\omega}\log\frac{x}{p_1 p_2}\right)^{-1}d\omega\Bigg|.$$

其中 d^* 是 χ_d 的 conductor，而 $\chi_{d^*}^*$ 是等价于 χ_d的 modd^* 的原特征，$\nu(d)$是 d 的素数因子的个数。

引理 5．设 x 是偶数，则有

$$Q\leqslant\frac{M_1+M_2}{1-\varepsilon}+O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}\right).$$

证：由(5)式和(6)式，我们有

$$M \leqslant M_1 + |M_3| + M_4 + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}\right), \quad (7)$$

其中、

$$M_3 = \sum_{(d_1,x)=1} \sum_{(d_2,x)=1} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{\varphi\left(\frac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)}\right)}$$

$$\sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}} \leq p_1 < x^{\frac{1}{3}} \leq p_2 < \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ n \leq \frac{x}{p_1 p_2} \\ (d_1 d_2,\, p_1 p_2)=1}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}}\right)$$

$$\Lambda(n)\,\Phi\left(\frac{x}{p_1 p_2 n}\right),$$

$$M_4 = \sum_{(d_1,x)=1} \sum_{(d_2,x)=1} \left(-\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{2\pi i\varphi\left(\frac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)}\right)}\right)$$

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left(\frac{x^{\omega}}{\omega}\right) \left(1 + \frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}$$

$$\cdot \sum_{\substack{\chi \bmod \frac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)} \\ \chi \neq \chi_0}} \overline{\chi_{\frac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)}}}(x)\, \frac{L'}{L}\left(\omega, \chi_{\frac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)}}\right)$$

$$\sum_{x^{\frac{1}{10}} \leq p_1 < x^{\frac{1}{3}} \leq p_2 < \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\chi_{\frac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)}}(p_1 p_2)}{(p_1 p_2)^{\omega} \log \frac{x}{p_1 p_2}}\, d\omega.$$

首先估计 M_3,

$$M_3 \ll x^{\varepsilon} \sum_{d \leqslant x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 < (\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}} \\ n < \frac{x}{p_1 p_2} \\ (d, p_1 p_2) = 1}}$$

$$\Lambda(n) \ll \sum_{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 < (\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{p_1 p_2} \right)$$

$$\left(\sum_{\substack{d < x^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \\ p_1 | d}} \frac{1}{d} + \sum_{\substack{x < x^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \\ p_2 | d}} \frac{1}{d} \right) + \sum_{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 < (\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sum_{p < \frac{x}{p_1 p_2}} (\log p) \sum_{\substack{d < x^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \\ p | d}} \frac{x^{\varepsilon}}{d} + x^{1-\varepsilon} \ll x^{-1\varepsilon}. \tag{8}$$

再估计 M_4，设 $\mu(d) \neq 0, d = p_1 \cdots p_k$，则正整数 d_1 和 d_2 满足 $\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)} = d$ 的充分和必要的条件是 $d_1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$，$d_2 = p_1^{\beta_1} \cdots\cdots p_k^{\beta_k}$，其中 $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, 0 \leqslant \beta_i \leqslant 1$，$\alpha_i + \beta_i \geqslant 1\ (1 \leqslant i \leqslant k)$。故当 $d > 0$，$\mu(d) \neq 0$ 时，则满足 $\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)} = d$ 的正整数 d_1，d_2 的组数为 $3^{\nu(d)}$。由于 $|\lambda_d| \leqslant 1$，故有

$$M_4 \leqslant \sum_{\substack{d < x^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \\ (d, x) = 1}} \frac{3^{\nu(d)} |\mu(d)|}{\varphi(d)} \left| \sum_{\chi_d \neq \chi_0} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \right.$$

$$\left(\frac{x^{\omega}}{\omega} \right) \left(1 + \frac{\omega}{(\log x)^{1.1}} \right)^{-\log x - 1}$$

$$\cdot \overline{\chi_d}(x) \frac{L'}{L}(\omega, \chi_d) \sum_{x^{\frac{1}{10}} < p_1 < x^{\frac{1}{3}} < p_2 < (\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\omega}}\right)\left(\frac{d\omega}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Bigg|\cdot$$

由于$\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)=\frac{L'}{L}(\omega,\chi_{d^*})+\sum_{p\mid\frac{d}{d^*}}\frac{\chi_{d^*}(p)\log p}{p^{\omega}-\chi_{d^*}(p)}$,

故有

$$M_4\leqslant M_2+M_5, \tag{9}$$

其中

$$M_5=\sum_{\substack{d<x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\Bigg|\sum_{\chi_{d^*}\neq\chi_0}\overline{\chi_{d^*}}(x)$$

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(\frac{x^{\omega}}{\omega}\right)\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}$$

$$\cdot\left(\sum_{p\mid\frac{d}{d^*}}\frac{\chi_{d^*}(p)\log p}{p^{\omega}-\chi_{d^*}(p)}\right)\sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}\leqslant p_1<x^{\frac{1}{3}}\leqslant p_2\leqslant(\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}}\\(p_1p_2,d)=1}}$$

$$\frac{\chi_{d^*}(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\omega}\log\frac{x}{p_1p_2}}d\omega\Bigg|\cdot$$

又当 $\mathrm{Re}\,\omega=2$ 时，有$\frac{\chi_{d^*}(p)}{p^{\omega}-\chi_{d^*}(p)}=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(\frac{\chi_{d^*}(p)}{p^{\omega}}\right)^{\lambda}$. 又

当 $\lambda\geqslant1,\mu(d^*)\neq0,(d^*,xp_1p_2p^{\lambda})=1$ 时，则使用引理 4,我们有

$$\left|\sum_{\chi_{d^*}}\overline{\chi_{d^*}}(x)\chi_{d^*}(p_1p_2p^{\lambda})\right|$$

$$=\left|\sum_{\chi_{d^*}}{}^*\chi_{d^*}(p_1p_2p^{\lambda}y)\right|$$

$$\leqslant |(p_1p_2p^{\lambda}y-1,d^*)| = |(x-p_1p_2p^{\lambda},d^*)|, \quad (10)$$

其中 y 满足 $xy\equiv 1(\bmod d^*)$ 的解，又由(10)式及引理1得到

$$M_5 \ll \sum_{\substack{d\leqslant x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\\ (d,x)=1}} \frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)} \Bigg| \sum_{\substack{d^*|d\\ d^*>1}} \sum_{p|\frac{d}{d^*}} (\log p)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}\leqslant p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2\leqslant(\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}}\\ (p_1p_2,d)=1}} \sum_{\chi_{d^*}} \overline{\chi}_{d^*}(x)\chi_{d^*}(p_1p_2p^{\lambda})$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2p^{\lambda}}\right)\Bigg| \ll \sum_{\substack{d\leqslant x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\\ (d,x)=1}}$$

$$\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)} \sum_{\substack{d^*|d\\ d^*>1}} \sum_{p|\frac{d}{d^*}} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}\leqslant p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2\leqslant(\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}}\\ (p_1p_2,d)=1}}$$

$$\cdot \sum_{1\leqslant\lambda\leqslant(\log\frac{x}{p_1p_2})(\log p)^{-1}} \left(\frac{\log p}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)$$

$$(x-p_1p_2p^{\lambda},d^*) \ll \sum_{\substack{k_1k_2\leqslant x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\\ (k_1k_2,x)=1}} \frac{|\mu(k_1)||\mu(k_2)|x^{\frac{1}{4}}}{\varphi(k_1)\varphi(k_2)}$$

$$\cdot \sum_{p|k_2} \sum_{x^{\frac{1}{10}}\leqslant p_1<x^{\frac{1}{3}}<p_2\leqslant(\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}}} \sum_{1\leqslant\lambda\leqslant(\log\frac{x}{p_1p_2})(\log p)^{-1}}$$

$$(x-p_1p_2p^{\lambda},k_1) \ll x^{\frac{1}{3}} \sum_{\substack{k_1\leqslant x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\\ (k_1,x)=1}}$$

$$\cdot \frac{1}{k} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}} < p_1 \leqslant x^{\frac{1}{3}} < p_2 \leqslant (\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}} \\ p^{\lambda} \leqslant \frac{x}{p_1 p_2}}} (x - p_1 p_2 p^{\lambda}, k_1)$$

$$\sum_{\substack{k_2 \leqslant x^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \\ k_2 \equiv 0 (\bmod\ )}} \frac{1}{k_2} \ll x^{\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}} < p_1 \leqslant x^{\frac{1}{3}} < p_2 \leqslant (\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}} \\ p^{\lambda} \leqslant \frac{x}{p_1 p_2}}}$$

$$\cdot \frac{1}{p} \sum_{d \mid (x - p_1 p_2 p^{\lambda})} d \sum_{\substack{k_1 \leqslant x^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \\ d \mid k_1}} \frac{1}{k_1} \ll x^{1-\varepsilon} . \quad (11)$$

由(7)式，(8)式，(9)式及(11)式，本引理得证。

引理 6．我们有

$$M_2 \ll \frac{x}{(\log x)^{2.01}} .$$

证：令

$$\Phi(y,\chi) = \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left(\frac{y^{\omega}}{\omega} \right)$$

$$\left(1 + \frac{\omega}{(\log x)^{1.1}} \right)^{-[\log x]-1} \frac{L'}{L}(\omega,\chi) d\omega$$

$$= \int_{1+\frac{1}{\log x}-i\infty}^{1+\frac{1}{\log x}+i\infty} \left(\frac{y^{\omega}}{\omega} \right)$$

$$\left(1 + \frac{\omega}{(\log x)^{1.1}} \right)^{-[\log x]-1} \frac{L'}{L}(\omega,\chi) d\omega .$$

则有

$$M_2 \leqslant \sum_{\substack{1 < l \leqslant x^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \\ (l,x)=1}} \left\{ \sum_{\substack{1 \leqslant d \leqslant x^{\frac{1}{2}-\eta} \\ l \mid d, (d,x)=1}} \frac{|\mu(d)| 3^{\nu(d)}}{\varphi(d)} \right\|$$

$$\sum_{\chi_l}{}^{*}\overline{\chi_l}(x)\sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1\le x^{\frac{1}{3}}<p_2\le(\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}}\\(p_1p_2,d)=1}}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)$$

$$\cdot\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_l\right)\chi_l(p_1p_2)\Bigg|$$

$$\leqslant\sum_{\substack{1<d\le x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}$$

$$\cdot\Bigg\{\sum_{\substack{1<l\le x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\\(l,xd)=1}}\frac{|\mu(l)|3^{\nu(l)}}{\varphi(l)}\Bigg|\sum_{\chi_l}\overline{\chi_l}(x)$$

$$\sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1\le x^{\frac{1}{3}}<p_2\le(\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}}\\(p_1p_2,d)=1}}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)$$

$$\cdot\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2}\chi_l\right)\chi_l(p_1p_2)\Bigg|\Bigg\}.$$

令 $\tau(l)=\sum_{d/l}1$，则有

$$\sum_{1<d\le x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\frac{3^{\nu(d)}|\mu(d)|}{\varphi(d)}\ll(\log x)\sum_{d\le x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\frac{(\tau(d))^2}{d}$$

$$\ll(\log x)^5.$$

故有

$$M_2\ll(\log x)^6\operatorname*{Max}_{1<m\le x^{\frac{1}{2}}}N_m. \tag{12}$$

其中

$$N_m=\sum_{\substack{1<l\le x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\\(l,x)=1}}\frac{|\mu(l)|3^{\nu(l)}}{l}\sum_{\chi_l}{}^{*}\overline{\chi_l}(x)$$

$$\sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1\le x^{\frac{1}{3}}<p_2\le\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\(p_1p_2,m)=1}}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_l\right)\chi_l(p_1p_2)\Bigg|.$$

我们用 $\sum\limits_{(k,m)}$ 来表示一个和式，其中的 p_1 和 p_2 经过且只经过 $x^{\frac{1}{10}}<p_1\leqslant x^{\frac{1}{10}}<p_2\leqslant\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}$，$x^{\frac{13}{30}}2^k<p_1p_2\leqslant x^{\frac{13}{30}}2^{k+1}$，$(p_1p_2,m)=1$。令 I_1 是一个正整数，满足 $2^{I_1-1}(\log x)^{100}<x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\leqslant 2^{I_1}(\log x)^{100}$，$I_2=\left[\frac{7\log x}{30\log 2}\right]$，则有

$$N_m\leqslant\sum_{l=0}^{I_1}\sum_{k=0}^{I_2}N_m^{(l,k)}. \qquad (13)$$

其中

$$N_m^{(0,k)}=\sum_{\substack{1\le d\le(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{d}$$

$$\left|\sum_{\chi_d}{}^{*}\ \overline{\chi}_d(x)\sum_{(k,m)}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\right.$$

$$\left.\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_d\right)\chi_d(p_1p_2)\right|.$$

而当 $l\geqslant1$ 时，

$$N_m^{(l,k)}=\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^{l}(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}$$

$$\frac{|\mu(d)|3^{v(1)}}{d}$$

$$\cdot\left|\sum_{\chi_d}{}^{*}\overline{\chi_d}(x)\sum_{(k,m)}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\right.$$

$$\left.\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2}\chi_d\right)\chi_d(p_1p_2)\right|,$$

令 $S(H,\omega,\chi_d)=\sum_{n=1}^{H}\frac{\mu(n)\chi_d(n)}{n^{\omega}}$，其中 $H\ll x$。我们知道当 $\mathrm{Re}\,\omega\geqslant 1$ 时，有

$$S(H,\omega,\chi_d)\ll\log x;L(\omega,\chi_d)$$

$$=\sum_{n=1}^{H}\frac{\chi_d(n)}{n^{\omega}}+O\left(\frac{|\omega|d^{\frac{1}{2}}\log d}{H}\right).$$

故得到当 $\mathrm{Re}\,\omega\geqslant 1$ 时，有

$$1-L(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\omega}}+O\left(|\omega|d^{\frac{1}{2}}\frac{(\log x)^2}{H}\right),$$

其中 $C_H(1)=0$，当 $n>H^2$ 时，$C_H(n)=0$；而当 $n>1$ 时，$C_H(n)=-\sum_{d}\mu(d)$，其中 d 经过 n 的因子，它使得 $1\leqslant d\leqslant H$ 及 $\frac{n}{d}\leqslant H$；当 $1\leqslant n\leqslant H$ 时，有 $C_H(n)=0$；而当 $n>H$ 时，$C_H(n)\leqslant\tau(n)$。故 $H\ll x$ 时，由 Schwarz 不等式得到

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\omega}}\right|^2\ll(\log x)\sum_{l=0}^{3I}$$

$$\left|\sum_{n=2^l H+1}^{2^{l+1}H} \frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\omega}}\right|^2.$$

令 $\alpha=1+\frac{1}{\log x}$，由上式、$\sum\limits_{n\leqslant x}\tau^2(n)\ll x(\log x)^3$及(3)式我们得到：当 $Q\ll x$ 时，有

$$\sum_{D<d\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{n=2^l H+1}^{2^{l+1}H}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\alpha+i\nu}}\right|^2$$

$$\ll\left(Q+\frac{2^l H}{D}\right)\sum_{n=2^l H+1}^{2^{l+1}H}\frac{(\tau(n))^2}{n^2}$$

$$\ll\left(\frac{Q}{2^l H}+\frac{1}{D}\right)(\log x)^3,$$

及

$$\sum_{D<d\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d}{}^{*}|1-L(\alpha+i\nu,\chi_d)$$

$$S(H,\alpha+i\nu,\chi)|^2$$

$$\ll\sum_{D<d\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\alpha+i\nu}}\right|^2$$

$$+\frac{|\alpha+i\nu|^2Q^2(\log x)^4}{H^2}\ll\left(\frac{Q}{H}+\frac{1}{D}\right.$$

$$\left.+\frac{|\alpha+i\nu|^2Q^2}{H^2}\right)(\log x)^5. \qquad (14)$$

令 $\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}$，由于 $\{S(H,\ \beta+i\nu,\ \chi_d\}^2=\sum\limits_{n=1}^{H^2}\frac{j(n)\chi_d(n)}{n^{\beta+i\nu}}$，其中$|i(n)|\leqslant\tau(n)$，故由(3)式可知，

当 $l\geqslant 1$，$H\ll x$ 时，有

$$\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\leqslant 2^{l}(\log x)^{100}}\frac{1}{\varphi(d)}$$

$$\sum_{\chi_d}{}^{*}|S(H,\beta+iv,\chi_d)|^4$$

$$\ll\left(2^{l}(\log x)^{100}+\frac{H^2}{2^{l}(\log x)^{100}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{H^2}\frac{(\tau(n))^2}{n}\ll 2^{l}(\log x)^{104}+\frac{H^2}{2^{l}(\log x)^{96}}\text{.}\tag{15}$$

由于 $L'(\omega,\chi_d)=\frac{1}{2\pi i}\int_{r}\frac{L(\xi,\chi_d)}{(\xi-\omega)^2}d\xi$，其中 r 是以 ω 为中心，$(\log x)^{-1}$ 为半径的圆，故有

$$|L'(\omega,\chi_d)|\ll(\log x)^2\int_{r}|L(\xi,\chi_d)|d\xi\text{.}$$

利用 Holder 不等式，得到

$$|L'(\omega,\chi_d)|^4\ll(\log x)^5\int_{r}|L(\xi,\chi_d)|^4|d\xi|\text{.}$$

又由引理 3，我们有

$$\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\leqslant 2^{l}(\log x)^{100}}\left(\frac{1}{\varphi(d)}\right)\sum_{\chi_d}{}^{*}$$

$$|L'(\beta+iv,\chi_d)|^4\ll 2^{l}(\log x)^{109}(|\beta+iv|)^2\text{.}$$

当 $\mathrm{Re}\,\omega\geqslant\alpha=1+\frac{1}{\log x}$ 时，我们得到

$$\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)=\left\{\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)\right\}\{1-L(\omega,\chi_d)$$

$$S(H,\omega,\chi_d)\}+L'(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d). \quad (16)$$

令

$$A(l,k,\omega,m,H)=\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{d}$$

$$\cdot\sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{(k,m)}\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\omega}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right|$$

$$|1-L(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d)|,$$

$$B(l,k,\omega,m,H)=\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)3^{\mu(d)}|}{d}$$

$$\cdot\sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{(k,m)}\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\omega}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right|$$

$$L'(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d)|,$$

若$l\geqslant 1$时，由(16)式我们有

$$N_m^{(l,k)}\ll x(\log x)^2$$

$$\int_0^{\infty}\frac{A(l,k,\alpha+i\nu,m,H)}{|\alpha+i\nu|\left(1+\frac{|\alpha+i\nu|}{(\log x)^{1.1}}\right)^{\log x+1}}d\nu$$

$$+x^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\frac{B(l,k,\beta+i\nu,m,H)}{|\beta+i\nu|\left(1+\frac{|\beta+i\nu|}{(\log x)^{1.1}}\right)^{\log x+1}}d\nu$$

(17)

显见，当 $|\mu(d)|\neq 0$ 及 d 很大时，有

$$3^{\nu(d)} \leqslant e^{\frac{3\log d}{\log\log d}}. \tag{18}$$

现在我们首先对 $l\geqslant 1$ 时，$2^k x^{\frac{13}{30}} > x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ 及 $x^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \geqslant 2^k x^{\frac{13}{30}} > 2^l(\log x)^{100}$ 这二种情形的 $N_m^{(l,k)}$ 进行估计，此时我们取 $H = 2^l(\log x)^{200} I_{l,x}$，其中 $I_{l,x} = e^{\frac{6\log\{2^l(\log x)^{100}\}}{\log\log\{2^l(\log x)^{100}\}}}$。则根据(14)—(18)式，我们有

$$N_m^{(l,k)} \ll x(\log x)^4 \int_0^\infty$$

$$\Bigg[\Bigg\{ \sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100} < d \leqslant 2^l(\log x)^{100} \\ (d,x)=1}}$$

$$\frac{|\mu(d)|}{d} \sum_{\chi_d}^{*} \Bigg| \sum_{(p_1p_2,m)} \frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\alpha+i\nu}\log\frac{x}{p_1p_2}} \Bigg|^2 \Bigg\}$$

$$\cdot \Bigg\{ \sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100} < d \leqslant 2^l(\log x)^{100} \\ (d,x)=1}}$$

$$\frac{|\mu(d)|}{d} \sum_{\chi_d}^{*}$$

$$|1 - L(\alpha+i\nu,\chi_d)S(H,\alpha+i\nu,\chi_d)|^2\Big\} I_{l,x}\Bigg]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \left(\frac{d\nu}{1+\nu^2}\right) + x^{\frac{1}{2}}(\log x)^4 \int_0^\infty \Big\{ (I_{l,x})$$

$$\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100} < d \leqslant 2^l(\log x)^{100} \\ (d,x)=1}} \frac{|\mu(d)|}{d} \sum_{\chi_x}^{*}$$

$$\cdot \left| \sum_{(\cdot)} \frac{\chi_d(p_1 p_2)}{(p_1 p_2)^{\beta + i\nu} \log \frac{x}{p_1 p_2}} \right|^2 \Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\Big\{ \sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100} \\ (\cdot) = 1}}^{2^l (\log x)^{100}} \frac{|\mu(d)|}{d}$$

$$\sum_{\chi_d}^{*} |S(H, \beta + i\nu, \chi_d|^4 \Big\}^{\frac{1}{4}}$$

$$\cdot \left(\frac{d\nu}{1+\nu^4} \right) \Big\{ \sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100} \\ (\cdot) = 1}}^{2^l (\log x)^{100}}$$

$$\frac{|\mu(d)|}{d} \sum_{\chi_d}^{*} |L'(\beta + i\nu, \chi_d)|^4 \Big\}^{\frac{1}{4}}$$

$$\ll x (\log x)^8 \int_0^\infty \Big\{ \left(2^l (\log x)^{100} + \frac{2^k x^{\frac{13}{30}}}{2^l (\log x)^{100}} \right)$$

$$\left(\sum_{2^k x^{\frac{13}{30}} < n \le 2^{k+1} x^{\frac{13}{30}}} \frac{1}{n^2} \right) \left(\frac{2^l (\log x)^{100}}{H} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^l (\log x)^{100}} + \frac{(1+\nu^2) 2^{2l} (\log x)^{200}}{H^2} \right)$$

$$(I_{l,x}) \Big\}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d\nu}{1+\nu^{2 \cdot 1}} \right) + x^{\frac{1}{2}} (\log x)^8 \int_0^\infty$$

$$\Big\{ \left(2^l (\log x)^{100} + \frac{2^k x^{\frac{13}{30}}}{2^l (\log x)^{100}} \right) (I_{l,x}) \Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\{ 2^{2l} (\log x)^{213} + H^2 (\log x)^{13} \}^{\frac{1}{4}} (1+\nu^2)^{\frac{1}{4}}$$

$$\left(\frac{d\nu}{1+\nu^4} \right) \ll \frac{x}{(\log x)^{20}}. \qquad (19)$$

现在我们再对 $2^k x^{\frac{13}{30}} \leqslant 2^l(\log x)^{100} \leqslant 2x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ 时的 $N_m^{(l,k)}$ 进行估计，此时我们取

$$H = \max\left(2^{2l-k} x^{-\frac{13}{30}} (\log x)^{400} I_{l,x},\ x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right),$$

则有

$$N_m^{(l,k)} \ll x(\log x)^8 \int_0^\infty \left\{ \left(2^l(\log x)^{100} + \frac{2^k x^{\frac{13}{30}}}{2^l(\log x)^{100}} \right) \left(\sum_{2^k x^{\frac{13}{30}} < n \le 2^{k+1} x^{\frac{13}{30}}} \frac{1}{n^2} \right) \right.$$

$$\cdot \left(\frac{2^l(\log x)^{100}}{H} + \frac{1}{2^l(\log x)^{100}} + \frac{(1+v^2)2^{2l}(\log x)^{200}}{H^2} \right) \left. (I_{l,x}) \right\}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{dv}{1+v^{2\cdot 1}} \right)$$

$$+ x^{\frac{1}{2}}(\log x)^4 \int_0^\infty \left\{ \sum_{2^{l-1}(\log x)^{100} < d \le 2^l(\log x)^{100}} \frac{|\mu(d)|}{d} \sum_{\chi_d}{}^{*} |S(H, \beta+iv, \chi_d)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} (I_{l,x})^{\frac{1}{4}}$$

$$\cdot \left\{ \sum_{2^{l-1}(\log x)^{100} < d \le 2^l(\log x)^{100}} \frac{|\mu(d)|}{d} \sum_{\chi_d}{}^{*} |L'(\beta+iv, \chi_d)|^4 \right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$\cdot \left\{ \sum_{2^{l-1}(\log x)^{100} < d \le 2^l(\log x)^{100}} \frac{|\mu(d)|}{d} \sum_{\chi_d}{}^{*} \left| \left(\sum_{(\cdots)} \frac{\chi_d(p_1 p_2)}{(p_1 p_2)^{\beta+iv} \log \frac{x}{p_1 p_2}} \right)^2 \right|^2 \right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$\left(\frac{dv}{1+v^4}\right)$$

$$\ll \frac{x}{(\log x)^{20}} + x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{20}\left\{2^l(\log x)^{100}\right.$$

$$\left.+\frac{H}{2^l(\log x)^{100}}\right\}^{\frac{1}{2}}(I_{l,x})^{\frac{1}{2}}(2^l(\log x)^{109})^{\frac{1}{4}}$$

$$\cdot\left(2^l(\log x)^{100}+\frac{2^2\ x^{\frac{13}{15}}}{2\ (\log x)^{100}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{(1+v^2)^{\frac{1}{4}}}{1+v^4}dv \ll \frac{x}{(\log x)^{20}}. \tag{20}$$

现在来估计$N_m^{(0,k)}$，其中$0\leqslant k\leqslant l_2$，当$\chi_d$是原特征及$\mathrm{Re}S\geqslant 1-\frac{c}{d^{\frac{1}{300}}}$时，$L(S,\chi_d)\neq 0$。

其中c是一个常数，故有

$$N_m^{(0,\ )} \ll \sum_{1\ \ (0,\ )100} \frac{3^{v(\ )}|\mu(d)|}{d}\sum_{\chi_d}^{*}$$

$$\left|\int_{1-(\ 0\ )^{\frac{1}{12}}-i\infty}^{1-(\ 0\ )^{\frac{1}{12}}+i\infty}\sum_{(k,n)}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\right.$$

$$\cdot\chi_d(p_1p_2)\left(\frac{x}{p_1p_2}\right)^{\omega}\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}$$

$$\left.\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)\frac{d\omega}{\omega}\right|$$

$$\ll(\log x)^{200}\sum_{\frac{1}{10}\ p_1\ \frac{1}{3}\ \ 2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\frac{x}{p_1p_2}\right)^{-1-\frac{1}{(\log x)^{1/2}}} \ll \frac{x}{(\log x)^{20}}. \qquad (21)$$

由(12),(13)式及(19)—(21) 式，本引理得证。

引理 7．对于大偶数 x，我们有

$$M_x \leqslant \left\{\frac{(8+24\varepsilon)xC_x}{\log x}\right\}\left\{\sum_{x^{\frac{1}{10}} < p_1 \leqslant x^{\frac{1}{3}} < p_2 \leqslant \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{p_1p_2\log\frac{x}{p_1p_2}}\right\},$$

其中 $C_x = \prod_{\substack{p/x\\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$.

证：令 $S = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant (x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}}\\ (k,x)=1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)}$，则有

$$\lambda_d g(d) = \left(\frac{1}{S}\right) \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant (x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}}/d\\ (k,xd)=1}} \frac{\mu(kd)\mu(k)}{f(kd)}.$$

当$(m,x)=1$时，我们有

$$\sum_{\substack{d\leqslant (x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}}\\ (d,x)=1,\ m\mid d}} \lambda_d g(d) = \left(\frac{1}{S}\right)$$

$$\left(\sum_{\substack{d\leqslant (x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}}\\ (d,x)=1,\ m\mid d}} \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant (x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}}/d\\ (k,xd)=1}} \frac{\mu(kd)\mu(k)}{f(kd)}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{S}\right) \sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant (x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}}\\ (r,x)=1}} \frac{\mu(r)}{f(r)} \sum_{m\mid d\mid r} \mu\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$= \frac{\mu(m)}{Sf(m)}.$$

由于 $\dfrac{1}{\varphi\left(\dfrac{d_1d_2}{(d_1d_2)}\right)} = g(d_1)g(d_2)\sum\limits_{d|(d_1,d_2)} f(d)$. 故有

$$\sum_{d_1\leqslant(x^{\frac12-\varepsilon})^{\frac12}}\ \sum_{\substack{d_2\leqslant(x^{\frac12-\varepsilon})^{\frac12}\\(d_1d_2,x)=1}} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{\varphi\left(\dfrac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}$$

$$=\sum_{d_1\leqslant(x^{\frac12-\varepsilon})^{\frac12}}\ \sum_{\substack{d_2\leqslant(x^{\frac12-\varepsilon})^{\frac12}\\(d_1d_2,x)=1}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}g(d_1)g(d_2)$$

$$\sum_{k|(d_1,d_2)}f(k)=\sum_{\substack{k\leqslant(x^{\frac12-\varepsilon})^{\frac12}\\(k,x)=1}}f(k)$$

$$\left(\sum_{\substack{d\leqslant(x^{\frac12-\varepsilon})^{\frac12}\\k|d,(d,x)=1}}\lambda_d g(d)\right)^2=\frac{1}{S}. \qquad (22)$$

令 $V_k(x)=\sum\limits_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\(n,k)=1}}\dfrac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}$，则有

$$\log x\leqslant\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n}\leqslant\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\mu^2(n)}{n}\prod_{p|n}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{p^l}\right)$$

$$=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\mu^2(n)}{n}\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$$

$$=V_1(x)=\sum_{d|k}\ \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\(n,k)=d}}\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}$$

$$=\sum_{d|k}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant x/d\\(m,k)=1}}\frac{\mu^2(m)}{\varphi(m)}\leqslant\sum_{d|k}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}V_k(x)$$

$$= \frac{kV(x)}{\varphi(k)},$$

故有$V_k(x) = \frac{\varphi(k)\log x}{k}$. 令$\psi(1) = 1$，而当$q>2$时，令

$\psi(q) = \prod_{p|q}(p-2)$，则有

$$S = \sum_{\substack{1<k<(x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}} \\ (k,x)=1}} \frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)} \prod_{p|k} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right)$$

$$= \sum_{\substack{1<k<(x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}} \\ (k,x)=1}} \frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)} \sum_{q|k} \frac{1}{\psi(q)}$$

$$= \sum_{\substack{q<(x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}} \\ (q,x)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\psi(q)\varphi(q)} \sum_{\substack{r<(x^{\frac{1}{2}-\epsilon})^{\frac{1}{2}}/q \\ (r,qx)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}$$

$$\geqslant \sum_{\substack{q<(x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})^{\frac{1}{2}} \\ (q,x)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\psi(q)\varphi(q)} \left\{ \frac{\varphi(qx)}{qx} \log \frac{x^{\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}}}{q} \right\}$$

$$= \left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) (\log x^{\frac{1}{4}-\frac{\epsilon}{2}}) \prod_{p \nmid x} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right) + O(1)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{8} - \frac{\varepsilon}{4}\right)(\log x)}{C_x} + O(1).$$

由(22)式及上式，当x很大时，有

$$M_1 \leqslant (8 + 24\varepsilon) C_x (\log x)^{-1}$$

$$\sum_{\substack{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}\leqslant p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ n<\frac{x}{p_1 p_2}}} \left(\frac{\Lambda(n)}{\log \frac{x}{p_1 p_2}}\right) \Phi\left(\frac{x}{p_1 p_2 n}\right).$$

由引理1，本引理得证。

引理8．设 x 是大偶数，则有

$$Q\leqslant\frac{3.9404xC_x}{(\log x)^2}.$$

证：当 x 很大时，由引理5到引理7，我们有

$$Q\leqslant\left\{\frac{8(1+5\varepsilon)xC_x}{\log x}\right\}$$

$$\left\{\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}\leqslant p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{p_1p_2\log\frac{x}{p_1p_2}}\right\},\qquad(23)$$

又有

$$\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}\leqslant p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{p_1p_2\log\frac{x}{p_1p_2}}$$

$$\leqslant(1+\varepsilon)\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1<x^{\frac{1}{3}}}\int_{x^{\frac{1}{3}}}^{\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{dt}{p_1t(\log t)\log\frac{x}{p_1t}}$$

$$\leqslant(1+2\varepsilon)\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{dS}{S\log S}\int_{x^{\frac{1}{3}}}^{\left(\frac{x}{S}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{dt}{t(\log t)\left(\log\frac{x}{St}\right)}$$

$$=(1+2\varepsilon)\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1-\alpha}{2}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)\log x},$$

及

$$\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{1-\alpha-\beta}\right)d\beta$$

$$=\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\frac{\log\frac{1-\alpha}{2}-\log\frac{1}{3}-\log\frac{1-\alpha}{2}+\log\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)}{\alpha(1-\alpha)}d\alpha$$

$$\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}} \frac{\log(2-3\alpha)}{\alpha(1-\alpha)} d\alpha = \sum_{i=0}^{6} \int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}} \frac{\log\left(1.6-\frac{i}{10}\right)}{\alpha(1-\alpha)} d\alpha$$

$$+ \sum_{i=0}^{6} \int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}} \frac{\log\frac{2-3\alpha}{1.6-0.i}}{\alpha(1-\alpha)} d\alpha$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{6} \left\{ \log\left(1.6-\frac{i}{10}\right) \right\}$$

$$\left\{ \log \frac{\frac{9}{10}-\frac{i}{30}}{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}} - \log \frac{\frac{9}{10}-\frac{1}{30}-\frac{i}{30}}{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}} \right\}$$

$$+ \sum_{i=0}^{6} \int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}} \frac{(0.4+0.i-3\alpha)}{(1.6-0.i)\alpha(1-\alpha)} d\alpha$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{i} \left\{ \log(1.6-0.i) + \frac{4+i}{16-i} \right\} \left\{ \log\frac{27-i}{3+i} \right.$$

$$\left. - \log\frac{26-i}{4+i} \right\} - 3 \sum_{i=0}^{6} \int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}} \frac{d\alpha}{(1.6-0.i)(1-\alpha)}$$

$$= \sum_{i=0}^{6} \left\{ \log(1.6-0.i) + \frac{4+i}{16+i} \right\}$$

$$\cdot \left\{ \log\frac{108+23i-i^2}{78+23i-i^2} \right\}$$

$$-3 \sum_{i=0}^{6} \left(\frac{1}{1.6-0.i} \right) \left(\log\frac{27-i}{26-i} \right)$$

$$\leqslant (0.47+0.25)(0.32542) + (0.40547$$

$$+0.33334)(0.26236)+(0.33647$$
$$+0.42858)(0.22315)+(0.26236$$
$$+0.53847)(0.19671)+(0.18232$$
$$+0.66667)(0.17799)+(0.09531$$
$$+0.81819)(0.16431)+0.15415$$
$$-3\left(\frac{0.03774}{1.6}+\frac{0.03922}{1.5}+\frac{0.04082}{1.4}\right.$$
$$\left.+\frac{0.04256}{1.3}+\frac{0.04445}{1.2}+\frac{0.04652}{1.1}+0.04879\right)$$
$$\leqslant 0.234303+0.193837+0.17073+0.15754$$
$$+0.151115+0.1501+0.15415-3(0.023587$$
$$+0.026146+0.029157+0.032738$$
$$+0.037041+0.04229+0.04879)$$
$$\leqslant 1.21178-0.71924=0.49254. \qquad (24)$$

由(23)和(24)式，引理8得证。

设 x 是一大偶数，令 $P_x(x, x^{\frac{1}{10}})$ 表示满足下面条件的素数 p 的个数：$p\leqslant x, p\not\equiv x(\bmod p_i)$ $(1\leqslant i\leqslant j)$，其中 $3=p_1<p_2<\cdots<p_j\leqslant x^{\frac{1}{10}}$，对于一个素数 p'，则令 $P_x(x, p', x^{\frac{1}{10}})$ 表示满足下面条件的素数 p 的个数：$p\leqslant x, p\equiv x(\bmod p')$，$p\not\equiv x(\bmod p_i)(1\leqslant i\leqslant j)$。其中 $3=p_1<p_2<\cdots<p_j\leqslant x^{\frac{1}{10}}$。

引理9．设 x 是大偶数，则有

$$P_x(x, x^{\frac{1}{10}})-\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{x^{\frac{1}{10}}\leqslant p\leqslant x^{\frac{1}{3}}} P_x(x, p, x^{\frac{1}{10}})$$

$$\geqslant \frac{2.6408xC_x}{(\log x)^2}.$$

其中 $C_x = \prod_{\substack{p \mid x \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$

证：在文献〔11〕中取 $r(p) = \frac{p}{p-1}$，$K = x$，$Z = x^{\frac{1}{10}}$，则显见文献〔11〕中的条件(A_1)和(A_2) 都满足，由文献〔11〕中的（2.11）式，我们有

$$\Gamma_x(x^{\frac{1}{10}}) = \frac{x}{\varphi(x)} \prod_{p \nmid x} \frac{1 - \frac{1}{p-1}}{1 - \frac{1}{p}} \frac{e^{-\gamma}}{\log x^{\frac{1}{10}}}$$

$$\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}$$

$$= \frac{x}{\varphi(x)} \prod_{\substack{p \mid x \\ p > 2}} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

$$\frac{e^{-r}}{\log x^{\frac{1}{10}}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}$$

$$= \frac{20e^{-r}C_x}{\log x}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}. \qquad (25)$$

其中 r 是 Eular 常数，又当 $0 < u \leqslant 2$ 时，令 $F(u) = \frac{2e_{\gamma}}{u}$，$f(u) = 0$。而当 $u \geqslant 2$ 时，令 $(uF(u))' = f(u-1)$，$(uf(u))' = F(u-1)$，当 $2 < u \leqslant 3$ 时，有 $uF(u) = 2F(2)$，$F(u) = \frac{2e^{\gamma}}{u}$.

又当 $2 < u \leqslant 4$ 时，则有

$$uf(u)=\int_2^u F(t-1)dt=2e^{\gamma}\log(u-1),$$

$$f(u)=\frac{2e^{\gamma}\log(u-1)}{u}.$$

当 $3\leqslant u\leqslant 4$ 时，我们有

$$uF(u)=2e^{\gamma}+\int_3^u f(t-1)dt=2e^{\gamma}$$

$$\left(1+\int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right),$$

又有

$$5f(5)=2e^{\gamma}\log 3+\int_4^5 F(u-1)du$$

$$=2e^{\gamma}\left(\log 4+\int_3^4\frac{du}{u}\int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right).$$

在文献〔11〕的定理 A 中，取 $\xi^2=x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$，$q=1$，$z=x^{\frac{1}{10}}$，则由(25)式及文献〔11〕中的(2.19)，(4.18)及(3.24)式，我们知道当 x 很大时，有

$$P_x(x,x^{\frac{1}{10}})\geqslant\frac{2(1-\sqrt{\varepsilon})e^{-\gamma}xC_xf(5)}{(\log x)(\log x^{\frac{1}{10}})}$$

$$\geqslant\left\{\frac{8(1-\sqrt{\varepsilon})xC_x}{(\log x)^2}\right\}$$

$$\cdot\left\{\log 4+\int_3^4\frac{du}{u}\int_2^{-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right\}. \qquad (26)$$

又在文献〔11〕的定理 A 中取 $\xi^2=\dfrac{x^{\frac{1}{2}-}}{p}$，$q=p$，$z=x^{\frac{1}{10}}$，则由(25)式及文献〔11〕中的(2.18)，(3.24)及(4.18)，我们

有

$$\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p\leqslant x^{\frac{1}{3}}} P_x(x, p, x^{\frac{1}{10}})$$

$$\leqslant\left\{\frac{20(1+\sqrt{\varepsilon})e^{-\gamma}xC_x}{(\log x)^2}\right\}\left\{\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p\leqslant x^{\frac{1}{5}}}\left(\frac{2e^{\gamma}}{p}\right)\right.$$

$$\cdot\left(1+\int_2^{4-\frac{10\log p}{\log x}}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right)$$

$$\left.\left(\frac{\log x^{\frac{1}{10}}}{\log\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)+\sum_{x^{\frac{1}{5}}<p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{2e^{\gamma}\log x^{\frac{1}{10}}}{p\log\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$\leqslant\left\{\frac{(4+5\sqrt{\varepsilon}xC_x}{\log x}\right\}\left\{\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{5}}}\frac{dS}{S(\log S)\left(\log\left(\frac{x}{S}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}\right.$$

$$\int_2^{4-\frac{10\log 8}{\log x}}\frac{\log(t-1)}{t}dt$$

$$\left.+\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{dS}{S(\log)S\left(\log\left(\frac{x}{S}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}\right\}$$

$$=\left\{\frac{(4+5\sqrt{\varepsilon})xC_x}{(\log x)^2}\right\}\left\{\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{5}}\frac{d\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\right.$$

$$\int_2^{4-10\alpha}\frac{\log(t-1)}{t}dt$$

$$+\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\Bigg\}=\left\{\frac{(8+10\sqrt{\varepsilon})xC_x}{(\log x)^2}\right\}$$

$$\cdot\left\{\log 8+\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{5}}\frac{d\alpha}{2\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\int_{2}^{4-10\alpha}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right\}.$$

令 $4—10\alpha=u-1$，$\alpha=\frac{5-u}{10}$，$\frac{d\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}=-\frac{10du}{u(5-u)}$，

又当 $\alpha=\frac{1}{10}$时，有 $u=4$，而当$\alpha=\frac{1}{5}$时，$u=3$，故有

$$\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{5}}\frac{d\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\int_{2}^{4-10\alpha}\frac{\log(t-1)}{t}dt$$

$$=\int_{3}^{4}\frac{10du}{u(5-u)}\int_{2}^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt.$$

显见，当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，有 $\log x\leqslant\frac{x-1}{2}+\frac{x-1}{1+x}$，故有

$$\int_{3}^{4}\frac{du}{u}\int_{2}^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt-\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{5}}\frac{d\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\int_{2}^{4-10\alpha}\frac{\log(t-1)}{t}dt$$

$$=\int_{3}^{4}\left(\frac{1}{u}-\frac{2.5}{u(5-u)}\right)du\int_{2}^{p-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt$$

$$\geqslant\int_{3}^{4}\left\{\frac{2.5-u}{u(5-u)}\right\}du$$

$$\cdot \int_2^{-1}\left(\frac{t-2}{2}+\frac{t-2}{t}\right)\left(\frac{dt}{t}\right)$$

$$=\int_3^4\left\{\frac{2.5-u}{2u(5-u)}\right\}\left\{u-3+\frac{4}{u-1}-2\right\}du$$

$$=\int_3^4\left(\frac{1}{2}-\frac{2.25}{u}-\frac{1}{4(5-u)}+\frac{0.75}{u-1}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}-2.25\log\frac{4}{3}-\frac{\log 2}{4}+0.75\log\frac{3}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+0.75\log\frac{9}{8}-1.5\log\frac{4}{3}-\frac{\log 2}{4}$$

$$\geqslant 0.588335-0.6048075=-0.0164725.$$

由(26)和(27)式，我们有

$$P_x(x,x^{\frac{1}{10}})-\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{\frac{1}{10}<p<x^{\frac{1}{3}}}P_x(x,p,x^{\frac{1}{10}})$$

$$\geqslant\left(\frac{(8-50\sqrt{\varepsilon})xC_x}{(\log x)^2}\right)$$

$$\cdot\left(\log^4-\frac{\log 8}{2}-0.0164725\right)$$

$$\geqslant\frac{(8xC_x)(0.3301)}{(\log x)^2}.$$

故引理9得证。

三、结　　果

显见，我们有

$$P_x(1,2)\geqslant P_x(x,x^{\frac{1}{10}})-\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p<x^{\frac{1}{3}}}$$

$$P_x(x,p,x^{\frac{1}{10}}) - \frac{\Omega}{2} - x^{0.91}. \qquad (28)$$

由(28)式，引理8和引理9，即得到定理1

$$(1,2)及\ P_x(1,2) \geqslant \frac{0.67xC_x}{(\log x)^2}$$

的证明。

完全类似的方法可得到定理2的证明。

致谢：作者对闵嗣鹤同志和王元同志给予的帮助，表示衷心的感谢。

参 考 文 献

〔1〕 Renyi, A, 1948 Изв.АН СССР, серия матем 2,57—78.

〔2〕 潘承洞,1962数学学报，12,95—106.

〔3〕 Барбан, М.Б, 1961 Доклады Акад.Наук УзССР, 89—11.

〔4〕 王元,1962中国科学,11,1033—1054.

〔5〕 潘承洞,1963中国科学,12,455—473.

〔6〕 Барбан, М.Б, 1963 Матем.сб,61,418—425

〔7〕 Бухштаб, А.А, 1965 Доклавы АН СССР, 162,739—742.

〔8〕 Виноградов, А.И, 1965 Изв. АН СССР, серия матем,29,903—934.

〔9〕 Bombieri, E, 1965 Mathematika, 12,201—225.

〔10〕 陈景润,1966 科学通报,17,385—386.

〔11〕 Richert, H.E, 1969 Mathematika, 16,1—22.

19. 一个新的中值定理及其应用

潘承洞

1. 导引

命

$$\pi(X;d,l)=\sum_{\substack{p\le X\\ p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,d)}}1.$$

在1948年，瑞尼〔16〕证明了下面的定理：

定理 1. 对于任意正数 A，皆存在正数 η 使

$$R(X^{\eta};X)=\sum_{d\le X^{\eta}}\max_{y\le X}\max_{(l,d)=1}\left|\pi(y;d,l)-\frac{\pi(y;1,1)}{\phi(d)}\right|\ll X\log^{-A}X.$$

此处 $\phi(d)$表示欧拉函数.

确切地说，瑞尼的结果是对于一个加权和来证明的，但消除加权与否并不影响对主要问题的应用.

由此，他证明了下面的命题：

每个大偶数为一个素数及一个素因子个数不超过 C的殆素数之和.

为简单计，我们将上面的命题记为(1，C)，瑞尼并未给出 η 与 C 的定量估计，但用其方法，我们可以说 η 是非常小而 C 是非常大的.

巴尔巴恩〔12〕在1961年与我〔5〕在 1962 年独立地证明

了定理 1 对于 $\eta<1/6$ 与 $\eta<1/3$ 成立·用 $\eta<1/3$，我首先证明了定量结果(1,5)．1962 年王元〔9〕仅用 $\eta<1/3$ 证明了(1,4)．我〔14〕于1962年及巴尔巴恩〔13〕于1963年独立地证明了定理 1 对于 $\eta<3/8$ 成立，从而不需复杂的数值计算即推出(1,4)．1965年布赫夕塔布用 $\eta<3/8$证明了(1,3)．

1965 年，阿、依、维诺格拉朵夫与庞比尼〔1〕独立地证明了定理 1 对于 $\eta<2/1$成立．

确切地说，庞比尼证明了下面的重要定理，：

定理 2 （庞比尼）．对于任何 $A>0$皆有

$$\sum_{d\le X^{1/2}\log^{-B_1}X}\ \max_{y\le x}\ \max_{(l,d)=1}\left|\pi(y;d,l)-\frac{\pi(y;1,1)}{\phi(d)}\right|\ll X\log^{-A}X.$$

此处 $B_1=3A+23$．

不需太多的数值计算，即可由此推出(1，3)．

1975年，丁夏畦与我证明了下面新的中值定理：

定理 3．命

$$\pi(X;a,d,l)=\sum_{\substack{ap\le X\\ ap\equiv l(\bmod d)}}1,$$

及命 $f(a)$为一个实函数，$f(a)\ll 1$；则对于任意 $A>0$皆有

$$\sum_{d\le X^{1/2}\log^{-B_2}X}\ \max_{y\le X}\ \max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\le X^{1-\varepsilon}\\ (a,d)=1}}f(a)\left(\pi(y;a,d,l)-\frac{\pi(y;a,1,1)}{\phi(d)}\right)\right|$$

$$\ll X\log^{-A}X.$$

此处，$B_2=\frac{3}{2}A+17$及$0<\varepsilon<1$。

置

$$f(a)=\begin{cases}1, & 当\ a=1,\\ 0, & 当\ a>1.\end{cases}$$

则

$$\sum_{\substack{a\le X^{1-\varepsilon}\\ (a,d)=1}} f(a)\left(\pi(y;a,d,l)-\frac{\pi(y;a,1,1)}{\phi(d)}\right)$$

$$=\pi(y;d,l)-\frac{\pi(y;1,1)}{\phi(d)}.$$

所以定理3为定理2的推广，但其兴趣并不在于推广而在于应用。我们将在第3节给出若干应用的例子。

2.定理3的证明

为了证明定理3，我们列举一些熟知的引理，

引1. 对于任何复数a_n，我们有

$$\sum_{q\le Q}\frac{q}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2\ll(Q^2+N)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2,$$

及

$$\sum_{H<q\le Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2\ll\left(Q+\frac{N}{H}\right)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2,$$

此处星号表示过 mod$q$ 的所有原特征求和。

引 2. 若 $T\geqslant 2$ 及 $\left|\sigma-\frac{1}{2}\right|\leqslant 1/(200\log qT)$，则

$$\sum_{\chi q}{}^{*}\int_{-T}^{T}|L(\sigma+it,\chi)|^{4}dt\ll\phi(q)T\log^{4}qT,$$

及

$$\sum_{\chi q}{}^{*}\int_{-T}^{T}|L'(\sigma+it,\chi)|^{4}dt\ll\phi(q)T\log^{8}qT.$$

命

$$\Psi(X;a,d,l)=\sum_{\substack{n<X\\ an\equiv l\,(\mathrm{mod}\,d)}}\Lambda(n),$$

及

$$R(D;X,f)=\sum_{d\leqslant D}\max_{y\leqslant X}\max_{(l,d)=1}$$

$$\left|\sum_{\substack{a\leqslant X^{1-\varepsilon}\\ (a,d)=1}}f(a)\left(\psi(y;a,d,l)-\frac{\psi(y;a,1,1)}{\phi(d)}\right)\right|,$$

此处

$$D=X^{\frac{1}{2}}\log^{-\;2}X,\quad B_{2}=\frac{3}{2}A+17.$$

对于$(a,d)=(l,d)=1$，我们有

$$\psi(y;a,d,l)=\frac{1}{\phi(d)}\sum_{au\leqslant y}\sum_{\chi d}\chi(an)\overline{\chi(l)}\,\chi(n)$$

$$=\frac{1}{\phi(d)}\sum_{au\leqslant y}\chi_{d}^{0}(n)\Lambda(n)$$

$$+\frac{1}{\phi(d)}\sum_{\chi d\neq\chi_{d}^{0}}\overline{\chi}(l)\chi(a)\sum_{an\leqslant y}\chi(n)\Lambda(n)$$

$$=\frac{1}{\phi(d)}\sum_{au\leqslant y}\Lambda(n)+\frac{1}{\phi(d)}\sum_{l<q\mid d}\sum_{\chi d}{}^{*}$$

$$\overline{\chi}(l)\chi(a)\sum_{\substack{an\leqslant y\\(n,d)=1}}\chi(n)\Lambda(n)$$

$$+O\left(\frac{\log d\log y}{\phi(d)}\right).$$

由此可得

$$R(D;X,f)\leqslant\sum_{d<D}\frac{1}{\phi(d)}\sum_{1<q\mid d}\max_{y<X}\sum_{\chi q}{}^{*}$$

$$\left|\sum_{\substack{a<X^{1-\varepsilon}\\(a,d)=1}}f(a)\chi(a)\sum_{\substack{an\leqslant y\\(n,d)=1}}\Lambda(n)\chi(n)\right|$$

$$+O\left(\frac{X}{\log^{A}X}\right)\leqslant\log X\max_{m<D}\sum_{1<q<D}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi a}{}^{*}$$

$$\times\left|\sum_{\substack{a<X^{1-\varepsilon}\\(a,m)=1}}f(a)\chi(a)\sum_{\substack{an<y\\(n,m)=1}}\Lambda(n)\chi(n)\right|$$

$$+O\left(\frac{X}{\log^{A}X}\right). \tag{1}$$

命 h 为任意固定数及 $D_1=\log^{h}X$，由(1)及西革尔一瓦尔非茨定理可知

$$R(D,X,f)\leqslant\log X\max_{m<D}\sum_{D_1<q<D}\frac{1}{\phi(q)}\max_{y\leqslant X}\sum_{\chi a}{}^{*}$$

$$\times\left|\sum_{a\leqslant X^{1-\varepsilon}}f(a)\chi(a)\sum_{\substack{an\leqslant y\\(n,m)=1}}\Lambda(n)\chi(n)\right|$$

$$+O\left(\frac{X}{\log^{A}X}\right). \tag{2}$$

命 $D_1 \leqslant Q_1 \leqslant D, Q < Q' \leqslant 2Q$ 及命 (q) 表示区间 $Q < q \leqslant Q'$.

命 $\frac{1}{2} \leqslant E < X^{1-\varepsilon}$, $E < E' \leqslant 2E$ 及命 (a)表示区间 $E < a \leqslant E'$.

命

$$\operatorname{Im}(Q, E) = \sum_{(\ )} \frac{1}{\phi(q)} \max_{y < X} \sum_{\chi_q}{}^{*}$$

$$\left| \sum_{\substack{(\cdot) \\ (a, n)=1}} f(a)\chi(a) \sum_{\substack{a n \leqslant y \\ (n, m)=1}} \Lambda(n)\chi(n) \right|.$$

假定

$$\operatorname{Im}(Q,E) \ll \frac{X}{\log^{A+3} X}, \tag{3}$$

则显然得到定理 3.

为了方便起见，命

$$f^{(m)}(a) = \begin{cases} f(a), & \text{当}(m,a)=1, \\ 0, & \text{当}(m,a)>1, \end{cases}$$

$$d_E^{(m)}(n) = \Lambda(n), \quad E \geqslant D_1^2,$$

$$d_E^{(m)}(n) = \begin{cases} \Lambda(n), & \text{当}(n,m)=1, \\ 0, & \text{当}(n,m)>1; \end{cases} \quad E > D_1^2$$

及命

$$\operatorname{Im}'(Q,E) = \sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \max_{y < X} \sum_{\chi_q}{}^{*}$$

$$\left| \sum_{(a)} f^{(m)}(a)\chi(a) \sum_{a n \leqslant y} d_E^{(m)}(n)\chi(n) \right|.$$

则得

$$\mathrm{Im}'(Q,E)=\mathrm{Im}'(Q,E+O)\left(\frac{X}{\log^{A+3}X}\right). \quad (4)$$

由帕朗(perron)公式得

$$\mathrm{Im}'(Q,E) \ll \sum_{(q)} \frac{1}{\phi(q)} \max_{y\leqslant X} \sum_{\chi q}{}^{*}$$

$$\times\left|\int_{b-iT}^{b+iT} f_{E}^{(m)}(s,\chi) d_{y}^{(m)}(S,\chi)\frac{d_s}{s}\right.$$

$$+O\left(\frac{X}{\log^{A+3}X}\right). \quad (5)$$

此处

$$S=\sigma+it,\ b=1+\frac{1}{\log X},\ T=X^{10},$$

$$d_{E}^{(m)}(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty} d_{(E)}(n)\chi(n)n^{-s}, \quad \sigma>1,$$

$$f_{E}^{(m)}(s,\chi)=\sum_{(a)} f^{(m)}(a)\chi(a)a^{-s}.$$

引 3. 若 $E\leqslant D_1^2$，则

$$\mathrm{Im}'(Q,E)\ll XD_1^{-1}\log^{13}X+X^{\frac{1}{2}}DD^{\frac{1}{2}}\log^{b}X. \quad (6)$$

证：命 $M_1=QD_1$ 及

$$H(s,\chi)=\sum_{n<M_1}\mu(n)\chi(n)n^{-s},$$

为简单计，命 G,F,H 与表示 $d_{E}^{(m)}(s,\chi)$，$f_{E}^{(m)}(s,\chi)$ 与 $H(s,\chi)$，则

$$FG=FG(1-LH)+FGLH$$
$$=FG(1-LH)-FL'H. \quad (7)$$

我们有

$$FG=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\chi(n)n^{-s}=F_1+F_2, \qquad (\ )$$

此处

$$F_1=\sum_{n\leqslant M_1}^{\infty}a(n)\chi(n)n^{-s},$$

$$F_2=\sum_{n>M_1}a(n)\chi(n)n^{-s}. \qquad (9)$$

其中

$$a(n)=\sum_{l\mid n}d_E^{(n)}(l)f^{(n)}\left(\frac{n}{l}\right).$$

可(7),(8),(9)可得

$$\int_{b-iT}^{b+iT}FG\frac{y^s}{s}ds=\int_{(b\cdot T)}FG\frac{y^s}{s}ds$$

$$=\int_{(b\cdot T)}F_2(1-LH)\frac{y^s}{s}ds$$

$$+\int_{(\frac{1}{2}\cdot T)}(F_1-F_1LH-FL'H)\frac{y^s}{s}ds$$

$$+O(X^{-1}).$$

由此及薛瓦尔茨不等式得

$$\mathrm{Im}'(Q,E)\ll X\log X\max_{\mathrm{Re}\,s=b}\left(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi q}{}^{*}|F_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\max_{\mathrm{Re}\,s=b}\left(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi q}{}^{*}|1-LH|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+X^{\frac{1}{2}}\log XQ^{\frac{1}{2}}\max_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi q}{}^{*}|F_1|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+X^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{3}{4}}X\max_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{( )}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi q}{}^{*}|F_1|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\max_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{( )}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi q}{}^{*}|H|^4\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\left(\sum_{( )}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi q}{}^{*}\int_{(\frac{1}{2},T)}\frac{|L|^4}{|s|}|ds|\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$+X^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{3}{4}}X\max_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{( )}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi q}{}^{*}|F|^2\right)\max_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}$$

$$\left(\sum_{( )}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi q}{}^{*}|H|^4\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\times\left(\sum_{( )}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi q}{}^{*}\int_{(\frac{1}{2},T)}\frac{|L'|^4}{|s|}|ds|\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (10)$$

用引1与引2估计(10)的每一项，我们立刻得(6)式。

引4． 若$E>D_1^2$，则

$$\mathrm{Im}'(Q,E)\ll XD_1^{-1}\log^4X+X^{\frac{1}{2}}D\log^2X. \quad (11)$$

证：当$\mathrm{Re}s=b=1+1/(\log X)$时，取$M_2=Q^2$，

则

$$G=d_H^{(m)}(s,\chi)=G_1+G_2,$$

$$G_1=\sum_{n\leqslant M_2}d_E^{(M)}(n)\chi(n)n^{-s},$$

$$G_2=\sum_{n>M_2}d_E^{( )}(n)\chi(n)n^{-s}$$

及

$$\int_{(b,T)}FG\frac{y^s}{s}ds=\int_{(b,T)}FG_2\frac{y^s}{s}ds$$

$$+\int_{(\frac{1}{2},\,t)} FG_1\frac{y^s}{s}ds+O(X^{1})\text{.}$$

由此及薛瓦尔茨不等式得

$$\operatorname{Im}'(Q,E)\ll X\log X\max_{\operatorname{Re}s=b}$$

$$\left(\sum_{(t)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi q}^{*}|G_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\max_{\operatorname{Re}s=b}\left(\sum_{(t)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi q}^{*}|G_1|^2\right)^{\frac{1}{2}}+X^{\frac{1}{2}}\log X$$

$$\times\max_{\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}}\left(\sum_{(t)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi q}^{*}|G_1|^2\right)^{\frac{1}{2}}\max_{\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}}$$

$$\left(\sum_{(t)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi q}^{*}|F|^2\right)^{\frac{1}{2}}\text{.}\qquad(12)$$

类似地，由引1与引2估计（12）的每一项，则立刻得(11)。

在(6)，(11)与(4)中取 $h=A+16$，则得(3)，定理3证完。

注记：若 $f(a)$ 满足

$$\sum_{h\leqslant X}|f(n)|\ll X\log^{\lambda_1}X,\ \sum_{u\leqslant X}\sum_{d\mid n}|f(d)|\ll X\log^{\lambda_2}X,\qquad(\triangle)$$

此处 λ_1，λ_2 为正常数，则定理3仍成立($B_2\geqslant q(A_1\lambda_1,\lambda_2)$)。

3.应　　用

A.用于结果(1,2)。

1966年与1973年，陈景润给出了一个新的加权筛法并证明了(1,2)，陈景润的主要贡献在于他指出了证明(1,2)的关键在于估计

$$\Omega=\sum_{\substack{(p_1,2)\\ p_3 \wedge p_1 p_2\\ N-p=p_1 p_2 p_3}} 1,$$

此处 N 为一个大偶数，及$(p_{1,2})$表示条件 $N^{\frac{1}{10}}<p_1<N^{1/3}\leqslant p_2\leqslant(N/p_1)^{1/2}$；而且他首先建议了一个估计 Ω 的方法，1975年，我们指出陈景润的加权筛法需估计者即定理3。

命 $P=\prod\limits_{\substack{2<p<N^{\frac{1}{4}-\varepsilon/2}\\ p\nmid N}} p$，则得

$$\Omega\leqslant\sum_{(p_1,2)}\sum_{\substack{p<N/p_1p_2\\ (N-p_1p_2p_3,P)=1}}$$

$$\Big\{\sum_{d\mid(N-p_1p_2p_3,P)}\lambda_d\Big\}^2+O(N^{\frac{1}{4}}).$$

此处 λ_d 为赛尔贝格函数($\lambda_d=0, d>N^{\frac{1}{4}-\varepsilon/2}$)。因此

$$\Omega\leqslant\sum_{d_1\mid P}\sum_{d_2\mid P}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{(p_1,2)}$$

$$\pi(N;p_1p_2,[d_1,d_2],N)+O(N^{\frac{1}{4}})$$

$$\leqslant\sum_{(p_1,2)}\sum_{d_1\mid P}\sum_{d_2\mid P}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{\pi(N;p_1p_2,1,1)}{\phi([d_1,d_2])}$$

$$+O\Bigg(\sum_{\substack{d<N^{(1/2)-\varepsilon}\\ (d,N)=1}}|\mu(d)|\,3^{\omega(d)}\Bigg|\sum_{\substack{(p_1,2)\\ (p_1p_2,d)=1}}$$

$$\Big(\pi(N;p_1p_2,d,N)-\frac{\pi(N;p_1p_2,1,1)}{\phi(d)}\Big)\Bigg|\Bigg)$$

$$+O(N^{\frac{1}{4}})$$

$$\leqslant \sum_{(p,2)} \sum_{d_1 \mid p} \sum_{d_2 \mid p} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \frac{\pi(N; p_1 p_2, 1, 1)}{\phi([d_1, d_2])}$$

$$+O\Bigg(\sum_{\substack{d<N^{1/2}/a \\ (d,N)=1}} |\mu(d)| 3^{\omega(d)} \Bigg| \sum_{N^{13/30}<a\leqslant N^{2/3}} f(a)\left(\pi(N; a, d, N) - \frac{\pi(N; a, 1, 1)}{\phi(d)} \right) \Bigg| \Bigg)$$

$$+O(N^{\frac{1}{4}}),$$

此处

$$f(a) = \begin{cases} 1, 当 a = p_1 p_2, & N^{\frac{1}{10}} < p_1 \leqslant N^{\frac{1}{3}} \leqslant p_2 \\ 0, 其他情形. & \end{cases}$$

$$\leqslant \left(\frac{N}{p_1} \right)^{\frac{1}{2}};$$

所以由定理 3 可知

$$\Omega \leqslant 主项 + O(N/\log^3 N).$$

B. $D(N)$的上界.

命

$$D(N) = \sum_{N=p_1+p_2} 1.$$

在1949年，赛尔贝格证明了

$$D(N) \leqslant 16(1+o(1))S(N)\frac{N}{\log^2 N}.$$

此处

$$S(N) = \prod_{p \mid N} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right).$$

在1964年，应用定理1，其中$\eta<1/3$，我将16改进为12.[15]，直到1978年，最佳结果均为1966年庞比尼与德文坡特[2]改进的系数8.

欲改进系数8是很困难的.1978年，陈景润[4]将系数8改进为7.8342，但他的证明很复杂，最近潘承彪给了陈景润结果一个简化证明，他证明了

$$D(N)\leqslant 7.928S(N)\frac{N}{\log^2 N}.$$

我现在来概要给出证明的主要步骤，

命 $B=\{b=N-p,p<N\}$，易见

$$D(N)\leqslant S(B,\ P,\ N^{\frac{1}{5}}+O(N^{\frac{1}{5}}), \tag{13}$$

此处

$$S(B,\ P,z)=\sum_{\substack{b\in B\\(b,\ P(z))=1}}1$$

及

$$P=\{p:p\nmid N\}\ ,\quad P(z)=\prod_{\substack{p\in P\\p<z}}p.$$

由布赫夕塔布恒等式

$$S(B;\ P,z)=S(B;\ P,w)-\sum_{\substack{w\leqslant p<z\\p\in P}}S(B_p,\ P,\ p). \tag{14}$$

此处$z\geqslant\omega\geqslant 2$及$B_d=\{b\in B,d|b\}$，易于证明

$$S(B;\ P,N^{\frac{1}{5}})\leqslant S(B;\ P,\ N^{\frac{1}{7}})-\frac{1}{2}\Omega_1+\frac{1}{2}\Omega_2+O(N^{\frac{6}{7}}). \tag{15}$$

此处

$$\Omega_1 = \sum_{N^{1/7} \leqslant p_1 < N^{1/5}} S(B_{p_1}; P, N^{\frac{1}{7}}), \tag{16}$$

及

$$\Omega_2 = \sum_{N^{1/7} \leqslant p_2 < p_3 < p_1 < N^{1/5}} S(B_{p_1 p_2 p_3}; P, p_3). \tag{17}$$

由朱尔凯特-黎切尔特定理[11]及庞比尼定理得

$$S(B;\ P, N^{\frac{1}{7}}) - \frac{1}{2}\Omega_1$$

$$\leqslant 8(1+0(1))S(N)\frac{N}{\log^2 N}\Big[1$$

$$+ \int_{1.5}^{2.5} \frac{\log(t-1)}{t} dt$$

$$- \frac{1}{2}\int_{2}^{2.5} \frac{\log(2.5 - 3.5/(t+1))}{t} dt\Big]. \tag{18}$$

因为 $\max p_1 p_2 p_3 \geqslant N^{1/2}$，所以我们不能用同样方法估计 Ω_2的上界。

为了估计 Ω_2，我们考虑集合

$$L = \Big\{ l = N - (n p_2 p_3 (p_1; N^{\frac{1}{7}} \leqslant p_2 < p_3 < N^{\frac{1}{5}}, 1 \leqslant n$$

$$\leqslant \frac{N}{p_2 p_4^3},\ \left(n, \frac{p(p_1)}{p_2}\right) = 1, p_3 < p_1 < \min$$

$$\left(N^{\frac{1}{5}} \frac{N}{n p_0 p_5} \right) \Big\}.$$

易知

$$\Omega_2 \leqslant \sum_{A} 1,$$

所以

$$\Omega_2 \leqslant S(L; P, N^{\frac{1}{4}-\varepsilon}) + O(N^{\frac{6}{7}}). \tag{19}$$

当我们用最简单的赛尔贝格上界筛法来估计$S(L; P, N^{\frac{1}{4}-\varepsilon})$时，误差正好可以用定理 3 来估计，而不是定理 2，故得

$$S(L; P, N^{\frac{1}{4}-}) \leqslant 8(1+o(1))S(N)\frac{X}{\log N}. \tag{20}$$

此处

$$X = \sum_{N^{1} \; 2 \; 3 \; 1 \; 1 \; 5 \; 1} \; \sum_{n \cdot N \; 1 \; 2 \; 3} . \tag{21}$$

由布赫夕塔布渐近公式

$$\sum_{\substack{1 \\ (u, (1 \quad))=1}} 1 = \frac{y}{\log y^{1/u}}\omega(u) + O\left(\frac{y}{(\log y^{(1 \quad)})^2}\right), \tag{22}$$

$$\begin{cases} \omega(u) = \dfrac{1}{u}, \leqslant u < 2, \\ (\omega(u)) = \omega(u-1), \quad u > 2, \end{cases}$$

我们得

$$\omega(u) < \frac{1}{1.763}, \quad u \geqslant 2.$$

由此及(22)可得

$$X<\frac{4}{1.763}\left(3\log\frac{7}{5}-1\right)(1+o(1))\frac{N}{\log N}. \quad (23)$$

由(23)、(20)、(19)、(18)及(15)得

$$S(B;\ P,N^{\frac{1}{5}})<7.928S(N)\frac{N}{\log^2 N}, \quad (24)$$

由此及(13)得

$$D(N)<7.928S(N)\frac{N}{\log^2 N}.$$

C.梯其玛奇除数问题的一个推广.

熟知由定理 2 可得渐近公式

$$\sum_{p<X}d(p-1)\sim C_1X.$$

此处$d(n)$表示除数函数及 C_1 为一个正常数，运用新中值公式可得下面的结果：

命 $1\leqslant y\leqslant X^{1-\varepsilon}(0<\varepsilon<1)$，及命 $f(a)$ 为一个满足条件(△)的实函数，则

$$\sum_{\substack{ap<x\\ a<y}}f(a)d(ap-1)\sim 2X\sum_{d\le X^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\phi(d)}\sum_{a<y}\frac{f(a)}{a\log(X/a)}.$$

置

$$f(a)=\begin{cases}1, & 答\ a=1,\\ 0, & 答\ a>1.\end{cases}$$

则得

$$\sum_{p\le X}d(p-1)\sim C_1X.$$

D. $p+a$ 的最大素因子.

命 P_x 为

$$\prod_{0<p+a<X}(p+a)$$

的最大素因子，此处 a 为一个非零整数。

1973 年，霍勒[10] 证明了当 $\theta<5/8$ 时有$P_x>X^{\theta}$，证明的关键在于估计和

$$V(y)=\sum_{\substack{p+a=kq\\ p\leq X-a\\ y<q\leq ry}}\log q. \tag{25}$$

此处 q 表示素数及 $X^{1/2}<y<X^{3/4}$, $1<r<2$。

利用赛尔贝格筛法，我们可将估计(25)化为估计下面的和：

$$\sum_{d\leq X^{1/2}\log^{-B}X}\ \sum_{k\leq X/y}\ \sum_{\substack{kq\leq X\\ kq\equiv a(\bmod d)}}\log q.$$

显然我们的定理在此地也可以用。

现在我们简要地解释一下筛法与与新中值公式之间的关系。

命 N为一个大整数，E为一个适合条件

$$(e,N)=1,\quad 0<e<x^{1-\eta_1}, 0<\eta_1<1, e\in E,$$

的正整数集，及命

$$L=\{l=N-ep,\quad e\in E,\quad ep\geqslant N\}$$

$$P=\{p: p\nmid N\}.$$

显然，当我们估计筛函数

$$S(L;P,z)=\sum_{\substack{l\in L\\ (l,P(z))=1}}1,\quad z\leqslant N^{\frac{1}{4}-\eta_2},$$

$$0<\varepsilon<\frac{1}{2} \tag{26}$$

时用赛尔贝格筛法，则只要

$$f(a)=\sum_{\substack{\ell=a\\ e\in E}}1$$

适合条件(△)，误差项正好可以用新中值定理来估计。

熟知，在陈景润的工作之前，当 $\max q\geqslant N^{1/2}$ 时，我们不能估下面筛函数之和

$$\sum_{q\in Q}S(B_q;P_q,z_q), \tag{27}$$

此处 Q 为一个不同正整数的集合，$B=\{b=N-p,p<N\}$，$B_q=\{b\in B,q|b\}$，P_q 为仅依赖于 q 的 P 的子集，及 z_q 为依赖于 q 的一个正整数，因为当我们用朱尔凯特黎切特定理去估计每个筛函数 $S(B_q;P_q,z_q)$ 时，由每个 $S(B_q;P_q,z_q)$ 引起的误差的总和不能用庞比尼定理来估计，当然，我们可以在哈贝斯担猜想下来估计(27)。

当 $N^{1/2}\leqslant\max\limits_{q\in Q}q\leqslant N^{1-\eta_2}$，$0<\eta_2<1$ 时，陈景润首先建议了估计某些类型和(27)的方法，简言之，他的方法的想法为将估计(27)转化为估计(26)；而我们指出实现陈景润方法的关键在于新中值定理。

参考文献

〔1〕 BombierE.
On the large Sieve.Mathematika.12(1965), 201—225.
〔2〕 Bombieri, E.andDavenPort, H.

Small differences between Prime number. Proc. Roy. Soc. Ser. A293 (1966), 1—8.

[3] Chen Jing run
On the rePresentation of a large even integer as the sum of a Prime and the Product of at most two Primes. Sci. Sin. 16 (1973), 157—176.

[4] Chen Jing run.
On the Goldbach's Problem and the sieve method. Sci Sin. 21 (1978), 701—739.

[5] Pan Cheng-Dong.
On the rePresentation of large even integer as a sum of a Prime and an almost Prime. Acta Math. Sin, 12 (1962), 95—106.

[6] Cheng-Dong, Pan, Xia xi, Ding, and Yuan Wang.
On the rePresentation of every large even integer as a sum of a Prime and an almost Prime. Sci. Sin. 18 (1975), 599—610.

[7] Cheng-Dong, Pan and Xiaxi, Ding.
A mean value theorem. Acta Math. Sin. 18 (1975), 254-262.

[8] Cheng Dong, Pan and Xiaxi, Ding.
A new mean value theorem (to aPPear).

[9] Wang, Yuan.
On the rePresentation of large integer as a sum of a Prime and almost Prime.
Sci. Sin. 11 (1962) 1033—1054.

[10] Hooley, C.
On the largest Prime factor of p + a. Mathematika 40 (1973), 135—143.

[11] Halberstam, H. and Richert, H.-E.

"Sieve Methods,"Academic Press, London, 1974.

〔12〕 Barban, M.B.
New applications of the "great sieve"of Ju. V. Linnik. Acad. Nauk Uzbek. SSR Trudy Inst. Mat. 22(1961), 1—20.

〔13〕 Barban, M.B.
The "density"of the zeros of DirichletL-series and the Problem ofthe sum of Primesand"near Primes". Mat. Sb. (N.S.) 61(103) (1963), 418—425.

〔14〕 Pan, Cheng-Dong.
On the representation of an even number as the sum of a prime and a Product of not more than four Primes. Sci. Sinica 12(1963), 455—474.

〔15〕 Pan, Cheng-Dong.
A new application of the Ju. V. Linnik large sieve method. Acta Math. Sinica 14(1964), 597—606.

〔16〕 Renyi, Alfred.
On the representation of an evennumber as the sum of a single Prime and a single almost-Prime number. Igv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat 12(1948), 57—78.

参考文献（Ⅰ）

H. DavenPort, MultiPlicative number theory, Markham, 1967; SPringer Verlag, 1980.

T. Estermann, Introduction to modern Prime number theory, Cambridge tracts, 41, 1952,

A. O. Gelfond and Ju. V. Linnik, Elementary method in analytic number theory, Math. Phy. Liter. Pub. House,

Moscow,1962.

H.Halberstam and H.—E.Richert,Sieve methods,Acad.
Pres s,1974.

华罗庚，(Hua Loo Keng) 堆垒素数论，Trud. Inrt. Mat.
Steklov,22, 1947；科学出版社,1952；Amer.Math.
Soc；1965.

华罗庚,数论导引，科学出版社,1957；SPringer Verlag,1982.

华罗庚，指数和的估计及其在数论中的应用，Enz. der Math.
Wiss, I,2,Heft13, Teil 1.LeiP, zig, Teubner, 1959；
科学出版社,1963,

M.N.Huxley,The distribution of Prime numbers,Oxford,
Clarendcn Press,1972.

A.A.Karatsuba,Basic analytic number theory, Nauk,
Moscow,1975.

E.Landau,Uber einige neuere Fortschritte der additiven
Zahlentheorie Cambridge tracts,35,1937.

闵嗣鹤 (Min Si He)，数论的方法（上），科学出版社，1958；
（下） 科学出版社，1981.

H.L.Montgomery, ToPics in mutlPlicative number th
eory, Lec.Notes in Math,SPriger Verlag, 227,1971,

潘承洞与潘承彪(Pan Cheng Dong and Pan Cheng Biao).
哥德巴赫猜想，科学出版社，1981.

K.Prachar, Primzahlverteilung, SPringor.Verlag,1957.

H.—E.Richert,Lectures on sieve methods,Tata Inst;
Bombay,1976.

N.G.Tchudakov,Introduction to the theory of Dirichlet
L—functicns, GITTL, Moscow, 1947.

R.C.Vaughan, The Hardy—Littlewood method,Gamb-
ridge tracts,80,1981.

I.M.Vinogradov,The method of trigonometrical sums,

in the theory of numbers, Trud,Inst.Math, steklov, 23,1947; Interscience, NewYork,1954; Nauk,Mcsccw, 1971.

I.M.Vinogradov,Basic variant of the method of trigonometrical sums,Nauk,Moscow,1976.

参考文献(Ⅰ)

N.C.Aukeny and H.Onishi,

〔1〕 The *ge*neral sieve,Acta Arit*h*; 10,1964—65,31—62.

V.M.Arkhangelskaya,

〔1〕 Some calculations connected with Goldbach's conjecture Ukrain Mat,Z; 9,1957,20—29,

R.Ayoub,

〔1〕 Cn Rademacher' s extension of the Goldbach—Vinogradoff theorem,Tran. Amer. Math. Soc; 74, 1953,482—491,

M.B.Barban,

〔1〕 New aPPlications of the "great sieve" of Ju,V. Linnik,Trudy Inst.Mat.Akad.Mauk UzSSR,22,1961, 1—20.

〔2〕 The density of zeros of Dirichlet L—series and the Problem of the addition of Primes and almost Primes,Dokl.Akad.Nauk UzSSR,1,1963,9—10.

〔3〕 The "density"of the zeros of Dirichlet L—series and the Problem of the sum of Primes an d"near Primes",Mat.Sbornik,61,1963,418—425.

〔4〕 Analogues of the divisor Problem of Titchmarsh, Vestnik Leningrad Univ;4,18,1963,5—13.

〔5〕 The"large sieve"method and its aPPlications to

number theory, UsPehi Mat. Nauk, 21, 1966, 51—102.

E) Bombieri,

〔1〕 On the large sieve, Mathematika, 12, 1965, 201—225.

〔2〕 On large sieve ineQualities and their aPPlications, Trudy at. Inst. Steklov, 132, 1973, 251—259.

E. Bombieri and H. DavenPort,

〔1〕 On the large sieve method, see "number theory and analysis" (PaPers in honor of Edmund Landau), New York, 1969, 9—22.

〔2〕 Small difference between Prim numbers, Proc. Roy. Soc; A, 293, 1966, 1—18.

K. G. Borozdkin,

〔1〕 On a Problem of Vinogradov' s constant, Trudy Mat. Soc; SSSR, 1, 1956, 3.

N. G. de Bruijn,

〔1〕 The asymPtotic behaviour of a function occurring in the theory of Primes, J. Indian Math. Soc; 15, 1951, 25—32.

〔2〕 On the number of Positive integers ≤x and free of Prime factors >y, Indag Math, 13, 1951, 2—12.

Viggo Brun,

〔1〕 Über das Goldbachshe Gesatz und die Anzahl der PrimzahlPaare, Archiv for Math. og Naturvid; B, 34, 8, 1915.

〔2〕 Le crible d'Eratosthene et le theoreme de Goldbach, C. R. Acad. Sci. Paris, 168, 1919, 544—546.

〔3〕 Le crible d'Eratothene et le theoreme de Goldbach, Skr, Norske Vid. Akad; Kristiania, I, 3, 1920, 1—36.

A. A. Buchstab,

〔1〕 AsymPtotic estimates of a general number theoretic

function, Mat. Sbornik, 44, 1937, 1239—1246.

〔2〕 New improvements in the method of the sieve of Eratosthenes, Mat. Sbornik, 46, 1938, 375—387.

〔3〕 Sur la decomposition des nombres pairs en somme de deux composantes dont chacune est formee dun nombre borne defacteurs premiers, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 29, 1940, 544—548.

〔4〕 On those numbers in an arithmetic progression all prime factors of which are small in order of magnitude, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 67, 1949, 5—8.

〔5〕 On an asymptotic estimate of the number of numbers of anarithmetic progression which are not divisible by "relatively" small prime numbers, Mat Sbornik, 70, 1951, 165—184.

〔6〕 On an additive representation of integers, Moscow Gos. Ped. Inst. Uc. Zap; 71, 1953, 45—62.

〔7〕 New results in the investigation of the Goldbach—Euler problem and the problem of prime pairs, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 162, 1965, 735—738.

〔8〕 Combinatorial intensification of the sieve method of Eratosthenes, Uspehi Mat. Nauk, 22, 1967, 199—226.

〔9〕 A simplified modification of the combinatorial sieve, Moscow Gos. Ped. Inst. Uc. Zap; 375, 1971, 187—194.

陈景润 (Chen Jing Run),

〔1〕 On large odd number as sum of three almost equal primes, Sci. Sinica, 14, 1965, 1113—1117.

〔2〕 **大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和，科学通报**，17, 1966, 385—386.

〔3〕 On the representation of a large even integer as the

sum of a Prime aud the Product of at most two Primes, Sci.Sinica, 16, 1973, 157—176; (Ⅱ): icid.21, 1978, 421—430.

〔4〕 On the Goldbach's Problem and the sieve methods, Sc. iSinica, 21, 1978, 701—739.

〔5〕 On the exceptional set of Goldbach numbers, (Ⅰ); Sci.Sinica, A, 1983, 327—342.

陈景润与潘承洞，

〔1〕 On the exceptioual set of Goldbach numbers, Sci. Sinica, 23, 1980, 219—232.

J.G.van der CorPut,

〔1〕 Sur le theoreme de Goldbach-Vinogradov, C.R. Acad.Sci; Paris, 205, 1937, 479—481.

〔2〕 Une nouvelle generalisation du theoreme de Goldb-achVinogradov, C.R.Acad.Sci; Paris, 205, 1937, 591—592.

〔3〕 Sur l'hyPothese de Goldbach Pour Presque tous les nombres Pairs, Acta Arith; 2, 1937, 266—290.

〔4〕 Sur l'hyPothese de Goldbach, Proc.Akad.Wet.Am-erstdam, 41, 1938, 76—80.

H.DavenPort and H.Halberstam,

〔1〕 The values of a trigonometric Polynomials at well spaced Points, Mathematika, 13, 1966, 91—96; ibid.14, 1967, 229—232.

J.M.Deshouillers,

〔1〕 Sur la constante de Snirel'man, Sem. DDP1975—76, Theorie des nombres, Fasc.2G16, sec.Math; Paris, 1977.

L.E.Dikson,

〔1〕 History of the theory of numbers (three volumes),

Carnegie Inst; Washington, 1919, 1920, 1923.

丁平与张明尧 (Ding Ping and Zhang Ming Yao),

[1] An improvement of Schnirelmann constant, Kexue Tongbao, 15, 1982, 897—900.

P.D.T.A.Elliott and H.Halberstam,

[1] Some applications of Bombieri's thorem, Mathematika, 13, 1966, 196—203.

T.Estermann,

[1] Eine neue Darstellung und neue Anwendungen der Viggo Brunschen Methode, J.Reine Angew. Math; 168, 1932, 106-116.

[2] A new result in the additive prime number theory, Quart. J. Math; Oxford, 8, 1937, 32-38

[3] Proof that every large integer is the sum of two primes and a square, Proc. London Math. Soc; 11, 1937, 501-516.

[4] Proof that almost all even positive integers are sum of two primes, Proc. London Math. Soc; 44, 1938, 307-314.

R.F.Faiziev,

[1] The number of integers, expressible in the form of a sum of two primes, and the number of k-twin pairs, Dokl. Akad. Nauk Tadzik, SSSR, 12, 1969, 12-16.

E.Fogel,

[1] On the zeros of L-function, Acta Arith; 11, 1965, 67-96.

I.Foldes,

[1] On the Goldbach hypothesis concerning the prime

numbers of an arithmetical Progression, C. R. Iier Congres Math. Hongrois, 1950; Akad. Kiado, Budapest, 1952, 474-492.

E. Fouvry,

[1] Un resultat nouveau en theorie additive des nombres premiers, Sem. de Th. des Nom; Univ. Bordeaux I, 1975-76.

A. Fujii,

[1] Some remarks on Goldbach's Problem, Acta Arith; 32, 1977, 27-35.

P. X. Gallagher,

[1] The large sieve, Mathematika, 14, 1967, 14-20.

[2] Bombieri's mean value theorem, Mathematika, 15, 1968, 1-6.

[3] A large sieve, density estimate near $\sigma=1$, Inv. Math; 11, 1970, 329-339.

[4] Primes and Powers of 2, Inv. Math; 29, 1975, 125-142.

[5] Local mean value and density estimate for Dirichlet L-function, Indag. Math; 37, 1975, 259-264.

C. Halasz and P. Turan,

[1] On the distribution of the roots of Riemann zeta and allied functions, I, J. Number Theory, 1, 1, 1969, 121-137.

H. Halberstam,

[1] A Proof of Chen's theorem, Asterisque, 24-25, 1975, 281-293.

H. Halberstam, W. Jurkat and H.-E; Richert,

[1] Un nouveau resultat de la methode du crible, C, R. Acad. Sci; Paris, Ser. A-B, 1967, 920-923.

G.H.Hardy,

[1] Goldbach's theorem, Math.Tid.B,1922,1-16.

[2] Collected Papers of G.H.Hardy, vol.I, Oxford. Clarendon Press,1966.

G.H.Hardy aud J.E.Littlewood,

[1] A new solution of Waring's Problem, Q.J.Math; 48,1919,272-293.

[2] Some Problems of "Partitio Numerorum"; I: A new solution of Waring's Problem, Got.Nach; 1920, 33-54; II: Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates, Math.Z; 9,1921,14-27; III: On the expression of a number as a sum of Primes, Acta Math; 44,1923,1-70; IV: The singular series in Waring's Problem, Math.Z; 12, 1922, 161-189; V: A further contribution to the study of Goldbach's Problem, Proc.London Math.Soc; 22,1923, 46-56; VI: Fucther researches in Waring's Problem, Math.Z; 23,1925,1-37; VIII: The number T(k) in Waring's Problem, Proc.London Math.Soc; 28,1928,518-542. (Number VII in this series is an unPublished manuscriPt on small differences between Prime numbers).

[3] Note on Messrs Shah and Wilson's Paper entitled: 'On an emPirical formula connected with Godbach's theorem', Proc.Camb.Phil.Soc; 19,1919,245-254.

G.H.Hardy and S.Ramanjuan,

[1] AsymPtotic formulae in combinatory analysis Proc.London Math.Soc; 17,1918,75-115.

C.B.Haselgrove,

[1] Some theorems in the analytic theory of numbers, J.London Math.Soc; 26,1951,273-277.

H. Heilbronn,

[1] Referat im Zbl. f. Math; 16, 1937, 291-292.

H. Heilbron, E. Laudau aud P. Scherk,

[1] Alle grossen ganzen Zahlen lassen sich als Summe von hochsteus 71 Primzahlen darstellen, CasoPis Pest. Mat; 65, 1936, 117-141.

D. Hilbert,

[1] Mathematische Proleme, Archiv f. Math. u. Phys; 3, Bd. 1, 1901, 44-63; 213-237.

G. Hoheisel,

[1] Primzahl Probleme in der Analysis, Sitz. der Preutz. Akad. d. Wiss; Phys. -Math; Kl. Berlin, 1930, 580-588.

C. Hooley,

[1] On the rePresentation of a number as the sum of two sqUares and a Prime, Acta Math; 97, 1957, 189-210.

Hsieh Sheng Kang,

[1] On the rePresentation of a large even number as a sum of a Prime and a Produst of at most three Primes, Shuxue Jinzhan, 8, 1965, 209-216.

华罗庚

[1] Some results in the additive Prime number theory, Quart. J. Math. Oxford, 9, 1938, 68-80.

[2] Estimation of an integral, Sci. Sinica, 2, 1951, 393-402.

[3] Selected PaPecs, SPringer Verlag, 1982.

M. H. Huxley,

[1] On the difference beteen consecutive Primes,

Inv.Math;15,1972,164-170.

[2] Large values of Dirichlet Polynomjals; Acta Arith;24,1973,329-346; I:ibid.27,1975, 159-169; I: ibid.27,1975,435-444.

M.N.Huxley and M.Jutila,

[1] Large values of Dirichlet Polynomials; IV: Acta Arith; 32,1977,297-312; V: ibid.33,1977, 89-104.

A.E.Ingham,

[1] On the difference between consecutive Primes,Quart.J.Math; Oxford 8,1937,255-266.

K.Iseki,

[1] A remark on the Goldbach-Vinogradov theorem,Proc.Japan Acad; 25,1949,185-187.

H.Iwaniec,

[1] Rosser's sieve-bilinear forms of the remainder terms-some applications,see'Recent Progress,in analytic number theory',I,Acad.Press, edited by H. Halberstam and C. Hooley,1981, 203-230.

R.D.James,

[1] On the sieve method of Viggo,Brun,Bull.Amer. Math.Soc; 49,1943,422-432.

[2] Recent Progress in the Goldbch Problem,Bull. Amer.Math.Soc; 55,1949,246-260.

R.D.James and H.Wyel,

[1] Elementary note on Prime number Problems of Vinogradov's type, Amer. J. Math; 64, 1942, 539-552.

W.B.Jurkat and H.-E.Richert,

[1] An improvement of Selberg's sieve method, I, Acta Arith; 11,1965,217-240.

M.Jutila,

[1] On the least Goldbach's number in an arithmetical progression with a prime difference, Ann Univ.Turku.Ser.A,I,118,1968.

[2] On Linnik's constant,Math.Scand; 41,1977,45-62.

I.Katai,

[1] A comment on a paper of Yu.V.Linnik,Magyer Tud.Akad.Mat.Fiz.Oszt.Kozl; 17,1967,99-100.

A.Khintchine,

[1] Zur additiven Zahlentheorie, Mat. Sbornik, 1932,27-34.

N.I.Klimov,

[1] The local density of certain sequences, Nauk Tr,Kuibysev Gos.Ped.Inst; 1961,11-15.

[2] Apropos the computations of Snirel' man's constant,Volz.Mat.Sb.Vyp; 7,1969,32-40.

[3] Improvement for the absolute constant in Goldbach Schnirelmann's problem, Nauk.Tr.Kuibysev Gos.Ped.Inst; 158,1975,14-30.

N.I.Klimov,G.Z.Pil'tjai and T.A.Septiskaja,

[1] The reprentation of natural numbers as sums of bounded number of prime numbers, Nauk Tr.Kuibysev Gos.Ped.Inst; 1,1971,44-47.

S.Knopowski,

[1] On Linnik's theorem concerning exceptional L-zeros,Pub.Math.Debrecen,9,1962,168-178.

L.F.Kondakova and N.J.Klimov,

[1] Certain additive Problems, Volz.Mat.Sb.Vyp; 7,1969,41-44.

P.Kuhn,

[1] Zur Viggo Brunschen Siebmethode, I, Morske Vid.Selsk.Forh.Trondhjem,14,1941,145-148.

[2] Neue Abschatzungen auf Grund der Viggo Brunschen Siebmethode,12 Skand,Mat,Kongr; Lund,1953,160-168.

[3] Uber die Primteiler eines, Polynoms, Proc. Intern.Congr.Math; Amerstdam,1954,35-37.

A.A.Kuzjasev and E.F.Cecuro,

[1] The representation of large integers bysums of Primes, see 'Studies in number theory' 3, Izdat,Saratov Univ;1969,45-50.

E.Landau,

[1] Uber die Zahlentheoretische Funktionn $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satz, Cot.Nachr,1900,177-186.

[2] Geloste und ungeloste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion,Proc.5 th Intern. Congr. Math;1,Camb;1912,93-108

[3] Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz, Nachr. Akad. Wiss. Math.-Phys.Kl;1930,255-276.

A.F.Lavrik,

[1] On the representation of numbers as the sum of Primes by Snirel'man's method, Izv.Akad.

Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat; 3, 1962, 5-10.

B. V. Levin,

[1] Distribution of "near Primes" in Polynomial sequences, Dokl. Akad. Nauk UzSSR, 11, 1962, 7-9.

[2] Distribution of "near Primes" in polynmial sequeuces, Mat Sbornik, 61, 1963, 389-407.

[3] Sieve method and its application, Doctoral dissertation of the Moscow Univ; 1963.

[4] A one-dimensional sieve, Acta Arith; 10, 1964-65, 387-397.

B. V. Levin and A. S. Fainleib,

[1] Application of certain integral equations to the questions of the theory of numbers, UsPehi Mat. Nauk SSSR, 22, 1967, 119-197.

W. A. Light, T. J. Forres, N. Hammd and S. Roe,

[1[A note on Goldbach's conjecture, BIT, 20, 1980, 525.

Ju. V. Linnik,

[1] "The lerge sieve", Dokl. Akad. Nauk SSSR, 30, 1941, 292-294.

[2] On Dirichlet's L-series and Prime number sums, Mat. sbornik, 15, 1944, 3-12.

[3] On the least Prime in anarithmetic Progression; I: The basic theorem, Mat. Sbornik, 15, 1944, 139-178; II: The Deuring-Heilbroun's Phenomenon, Mat. Sbornik, 15, 1944, 347-368.

[4] On the Possibility of a unique method in certain Problems of "additive" and "distributive" Prime number theory, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 48,

1945, 3-7.

[5] On the density of zeros of L-series, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat; 10, 1946, 35-46.

[6] A new Proof of the Vinogradov-Goldbach theorem, Mat. sbo-rnik, 1946, 3-8.

[7] Some conditional theorems concerning binary Problems with Prime, numbers, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 77, 1951, 15-18.

[8] Prime numbers and Powers of two, Trudy Mat-Inst. Steklov, 38, 1951, 152-169.

[9] Some conditional theorems concerning binary Goldbach Problem, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat; 16, 1952-530.

[10] Addition of Prime numbers with Powers of one and the same number, Mat. Sbornik, 32, 1953, 3-60.

[11] An asymptotic formula in an additive Problem of Hardy-Littlewood, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat; 24, 1960, 629-706.

[12] The dispersion metodin binary additive Problems, Leningrad Univ. Press, 1961; Providence, R.I; 1963.

[13] Collected Papers, Nauk, Koscow, 1980.

J.E. Littlewood,

[1] On the class number of the corpus P ($\sqrt{k}$), Proc. London Math. Soc; 27, 1927-28, 358-372.

陆鸣皋(Lu Ming Gao)

[1] Some Problems concerning the Goldbach number, I, (to appear).

陆鸣皋 陈文德(Chen Wen De)

[1] 素变数线性方程组的解，数学学报，15,1965,731-748.

B.Lucke,

[1] Zur Hardy-Littlewoodschen Behandlung des Goldbachschen Problems,Diss,Math, Naturwiss.Gottingen,1962.

A.P.Lursmanashvili,

[1] Representation of natural numbers by sums of Prime numbers, Thbilis Sahelmc. Univ. Shrom.Mekh.-Math.-Mec.Ser; 117,1966,63-76.

B.Mann,

[1] A Proof of the fundamental theorem on the density of sums of Sets of Positive integers,Ann.Math; 43,1942,27-34.

J.Merlin,

[1] Sur quelques theoremes d'Arithmetique et unenouce qui les contient, C.R. Acad. Sci; Paris,153,1911,516-518.

[2] Un travail sur les nombres premiers, Bull. Sci.Math; 39,1915,121-136.

R.J.Miech,

[1] Pseudo Primes and the Goldbach Problem, J.Reine Angew.Math; 233,1968,1—27.

闵嗣鹤

[1] 谈一个求极限问题，数学学报,4,1954,381—384.

H.L.Montgomery,

[1] Zeros of L-functions,Inv.Math; 8, 1969, 346—354.

H.L.Montgomery and R.C.Vaughan,

[1] The exceptional set in Goldbach's problem, Acta Atith; 27, 1975, 353—370.

Y. Motohashi,

[1] A note on the large sieve; I, Proc. Japan Acad; 53, 1971, 17—19; Ⅱ, ibid. 122-124; Ⅲ ibid. 55, 1979, 92—94.

A. Page,

[1] On the number of Primes in an arithmetic Progression, Proc. London Math. Soc; 39, 1935, 116—141.

潘承彪

[1] 三个素数定理的一个新证明，数学学报，20，1977，206—211.

潘承洞、

[1] **堆垒素数论的一些新结果**，9，1959，315—329.

[2] **表偶数为素数及殆素数之和，数学学报**，12，1962，95—106; Sci, Sinica; 11, 1962, 873—888.

[3] On representation of large even integer as the sum of a Prime and a Product of at most 4 Primes, Sci. Sinica, 12, 1963, 455—473.

[4] Ю.В. Линник. **大筛法的一个新应用，数学学报**，14, 1964, 597—608; Sci, Sinica, 13, 1964, 1045—1053.

[5] Goldbach **数，科学通报，数学物理，化学专辑**，1980

[6] Goldbach **问题的优孤，山东大学学报（自然科学）**，3，1980，1—6

[7] A new mean value theorem and its applications, see "Recent progress in analytic number theory" I, edited by H·Halberstam and C. Hooley, Acad. Press, 1981, 275—288.

[8] **关于 Goldbach 问题，山东大学学报**（自然科学），1,

1981, 1—6.

潘承洞与丁夏畦(Ding Xia Qi)

[1] **一个均值定理，数学学报**，18, 1975, 254—262; 19, 1976, 217—218.

[2] A new mean value theorem, Sci. Sinica, Special Issue(Ⅱ), 1979, 149—161.

潘承洞，丁夏畦与王元(Wang Yuan)

[1] On the representation of every large even integer as a sum of a prime and an almost prime, Sci. Sinica, 18, 1975, 599—610.

K. Prachar,

[1] On integers having many representations as a sum of two primes, J. London Math. Soc, 29, 1954, 347—350.

[2] Uber die Lo'sungszahl eines Systems von Gleichungen in Primzahlen, Mon. Math, 59, 1955, 98—103.

[3] Uber die Anwendung einer Methode von Linnik, Acta Arith, 29, 1976, 367—376.

H. Rademacher,

[1] Beitrage zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie, Abh. Math. Sem Univ. Hamburg, 3, 1924, 12—30.

K. Ramachandra,

[1] On the number of Goldbach numbers in small intervals, J. Indian Math. Soc, 37, 1973, 157—170.

[2] A simple proof of the mean fourth power estimate for $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ and $L\left(\frac{1}{2}it,\chi\right)$,

Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa Cl.Sci; 4,1974,81—97.

[3] Application of a theorem of Montgomery and Vaughan to the zeta function, J.London Math.Soc; 10,1975,482—486.

[4] Two remarks in prime number theory, Bull. France Math.Soc; 105,1977,433—437.

A.Renyi,

[1] On the representation of an even number as the sum of a prime and an almost prime, Dokl.Akad.Nauk SSSR,56,1947,455—458.

[2] On the representation of an even number as the sum of a prime and an almost prime, Izv.Akad.Nauk SSSR,Ser.Mat; 12,1948, 57—78.

[3] Probabilistic methods in number theory, Shuxue Jinzhan,4,1958,465—510.

G.Ricci,

[1] Su la congettura di Goldbach e la constante di Schnirelmann, Boll.Un.Mat.Ital; 15, 1936, 183—187.

[2] Su la congettura di Goldbach e la constante di Schnirelmann; I; Ann. Scuola Norm.Sup. Pisa(2),6,1937,71—90; II: ibid.6,1937,91—116.

H.-E.Richert,

[1] Aus der additiven Primzahltheorie, J.Reine Angew.Math; 191,1953,179—198.

[2] Selberg's sieve with weights, Mathematika, 16,1969,1—22.

G.J.Rieger,

[1] Uber die Folge der Zahlen der Gestalt P_1+P_2, Arch.Math; 15,1964,33—41.

[2] Uber ein lineares Gleichungssystem von Prachar mit Primzahlen, J.Reine Angew.Math; 213,1963—64,103—107.

B.Riemann,

[1] Uber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse, Ges.Math.Werke und Nach; 2,1859,145—155.

N.Riesel and R.C.Vaughan,

[1] On sums of primes, Arkiv fur Math; 21,1983, 45—74.

K.A.Rodoskij,

[1] On least prime number in arithmetic progression, Mat.Sbornik, 33,1954,331—356.

N.P.Romanov,

[1] On Goldbach problem, Izv.NEE Mat.and Tech. Univ.Tomsk, 1,1935,34—38.

P.M.Ross,

[1] On Chen's theorem that each large even number has the form p_1+p_2 or $p_1+p_2p_3$, J. London Math.Soc; 2,1975,500—506.

K.F.Roth,

[1] On the large sieve of Linnik and Renyi, Mathematika, 12,1965,1—9.

L.G.Schnirelmann,

[1] Uber additive Eigenschaften von Zahlen, Izv. Donck.Polytech.Inst; 14,1930,3—28.

[2] Uber additive Eigenschaften von Zahlen, Math.Ann; 107,1933,649—690.

A.Selberg,

[1] On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes, Acta Math. Naturvid; 47, 1943,87—105.

[2] On an elementary method in the theory of prime, Norske Vid.Selsk.Forh.Trondhjem,19, 1947,64—67.

[3] On elementary methods in prime number theory and their limitations,11 Skand.Mat. Kongr; Trondhjem,1949,13—22.

[4] The general sieve method and its place in prime number theory, Proc. Intern.Math. Congr; Camb.Mass; 1,1950,286—292.

[5] Sieve methods,Proc.Symp. Pure Math. AMS, 20,1971,311—351.

H.N.Shapiro and J.Warga,

[1] On the representation of large integers as sum of primes,I,Comm.Pure Appl. Math; 3,1950,153—176.

Shen Mok Kong,

[1] On checking the Goldbach conjecture, Nordisk Tidsr.Imfor.Behand; 4,1964.

H.Siebert,

[1] Darstellung als Summe von Primzahlen,Diplomarbeit,Marburg,1968.

C.L.Siegel,

[1] Uber die Classenzahl quadratischer körper, Acta Arith; 1,1936,83—86.

S. Srinivasan,

[1] A remark on Goldbach's problem, J. number theory, 12, 1980, 116—121.

P. Stackel,

[1] Uber Goldbach's empirisches Theorem; Jede grade Zahl kann als Summe von zwei Primzahlen darstellt werden, Got. Nachr; 1896, 292—299.

V. Statulevicius,

[1] On the representation of odd numbers as the sum of three almost equal prime numbers, Viliniaus Valst. Univ. Mokslu Darbai Mat. Fiz.-Chem; Molslu Ser. 3, 1955, 5—23.

J. J. Sylvester,

[1] On the partition of an even number into two primes, Proc. London. Math. Soc; Ser. 1, 1871, 4—6.

V. A. Tartakovskij,

[1] Sur quelques Sommes du type de Viggo Brun, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 23, 1939, 121—125.

[2] La methode du crible approximatif "electif", Dokl. Akad. Nauk SSSR, 23, 1939, 126—129.

N. G. Tchudakov,

[1] On the Goldbach problem, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 17, 1937, 331—334.

[2] On the density of the set of even integers which are not repreeentable as a sum of

two odd primes, Izv.Akad.Nauk SSSR, Ser. Mat; 1,1938,25—40.

[3] On the Goldbach-Vinogradov's theorem,Ann. Math; 48,1947,515—545.

N.G.Tchudakov and N.I.Klimov,

[1] Concerning the Snirel' man constant,Uspehi Mat.Nauk,SSSR,22,1967,212—213.

E.C.Titchmarsh,

[1] A divisor problem, Rend.Circ.Mat.Palermo, 54,1930,414—429.

P.Turan,

[1] Uber eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen,Akad.Kiado, Budapest, 1953.

[2] Certain function theoretic sieve methods in the theory of numbers, Dokl.Akad. Nauk SSSR,171,1966,1289—1292.

S.Uchiyama.

[1] On the representation of large even integers as sums of two almost primes; I: J. Fac.Sci.Hokkaido Univ.Ser.1,18,1964,60—68; II, ibid.69—77.

[2] On the representation of large even integers as sums of a prime and an almost prime II, Proc. Japan Acad; 43,1967,567—571.

M.Uchiyama and S.Uchiyama,

[1] On the representation of large even integers as sums of a prime and an almost prime,Proc.Iapan Acad; 40,1964,150—154.

R.C. Vaughan,

[1] On Goldbachs problem, Acta Arith; 22, 1972, 21—48.

[2] Mean value theorem in prime number theory, J. London Math. Soc; 10, 1975, 153—162.

[3] A note on Snirel'man's approach to Goldbach's problem, Bull. London Math. Soc; 8, 1976, 245—250.

[4] On the estimation of Schnirelmann's constant, J. Reine Angew. Math; 290, 1977, 93—108.

[5] Sommes trigonometriques sur les nombres premiers, C. R. Acad. Sci; Paris, A, 285, 1977, 981—983.

[6] An elementary method in prime number theory, see "Recent progress in analytic number theory", edited by H. Halberstam and C. Hooley, Acad. Press, 1981, 241—248.

A.I. Vinogradov,

[1] On an almost binary' problem, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat; 20, 1956, 713—750.

[2] On the connections between the sieve of Eratosthenes and theRiemann ζ-function, Vestnik Leningrad Univ; 11, 1956, 142—146,

[3] Application of ζ(s) to the sieve of Eratosthenes, Mat. Sbornik, 41, 1957, 49—80; Corrigendum, ibid. 415—416.

[4] The ddensity hypothesis for Dirichlet L-series, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat; 29, 1965, 903—934; Corrigendum, ibid. 30, 1966, 719—

720.

I. M. Vinogradov

[1] Sur le theoreme de Waring, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 1928, 393, —400.

[2] Some theorems in analytic theory of numbers Dokl. Akad. Nauk SSSR, 4, 1934, 185—187.

[3] Representation of an odd number as a sum of three primes, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 15, 1937, 291—294.

[4] Selected papers, Akad. Nauk SSSR Press, 1952.

A. Walfisz,

[1] Zur additiven Zahlentheorie, I, Math. Z; 40, 1936, 592—607.

王元

[1] 表大偶数为一个不超过三个素及的乘积个一不超过四个素数的乘积之和, 数学学报, 6, 1956, 500—513.

[2] 表大偶数为一个素数及一个不超过四个素数的乘积之和, 数学学报, 6, 1956, 565—582.

[3] 论筛法及其有关的若干问题, 科学纪录, 1, 1957, 9—11.

[4] 表大偶数为一个殆素二之和, 科学记录, 5, 1957, 267—270.

[5] 论筛法及其有关的若干应用 (I), 数学学报, 8, 1958, 413—429; Sci. Sinica, 8, 1959, 357—381.

[6] 整表数为素数与殆数之和, 数学学报, 10, 1960, 168—181; Sci; Sinica, 11, 1962, 1033—1054. (附有一个新附录).

[7] On Linnik's method concerning the Goldbach number, Sci. Sinica, 20, 1977, 16—30.

王元与单墫(Shan Zun).

[1] A conditional result on Goldbach problem,

(to appear).

吴方(Wu Fang)

[1] 素数变数的线性方程组，数学学报,7,1957,102—121.

尹定(Yin Ding)

[1] 小于3亿的全部偶数均为哥德巴赫数,科学通报, 18, 1984, 1150.

尹文霖(Yin Wen Lin)

[1] 关于表充分大的整数为素数和,北京大学学报(自然科学), 3, 1956,323-326.

A. Zulauf,

[1] Beweis einer Erweiterung des Satzes von Goldbach-Vinogradov, J, Reine Angew.Math, 190,1952,169—198.

[2] Uber die Darstellung naturlicher Zahlen als Summen von Primzahlen aus gegbenen Restklassen und Quadraten mit gegebenen Koeffizienten; I: Resultate fur genugen gross Zahlen, J.Reine Angew.Math; 192, 1953, 210—229; II:Die singular Reihe, ibid.193, 195 39—53; III:Resultate fur "faste alle" Zahlen, ibid.195,1953,54—64.

[3] On the number of representations of an integer as asum of primesbelonging togiven arithmetical progessions,Comp.Mat;15,1961, 64—69.